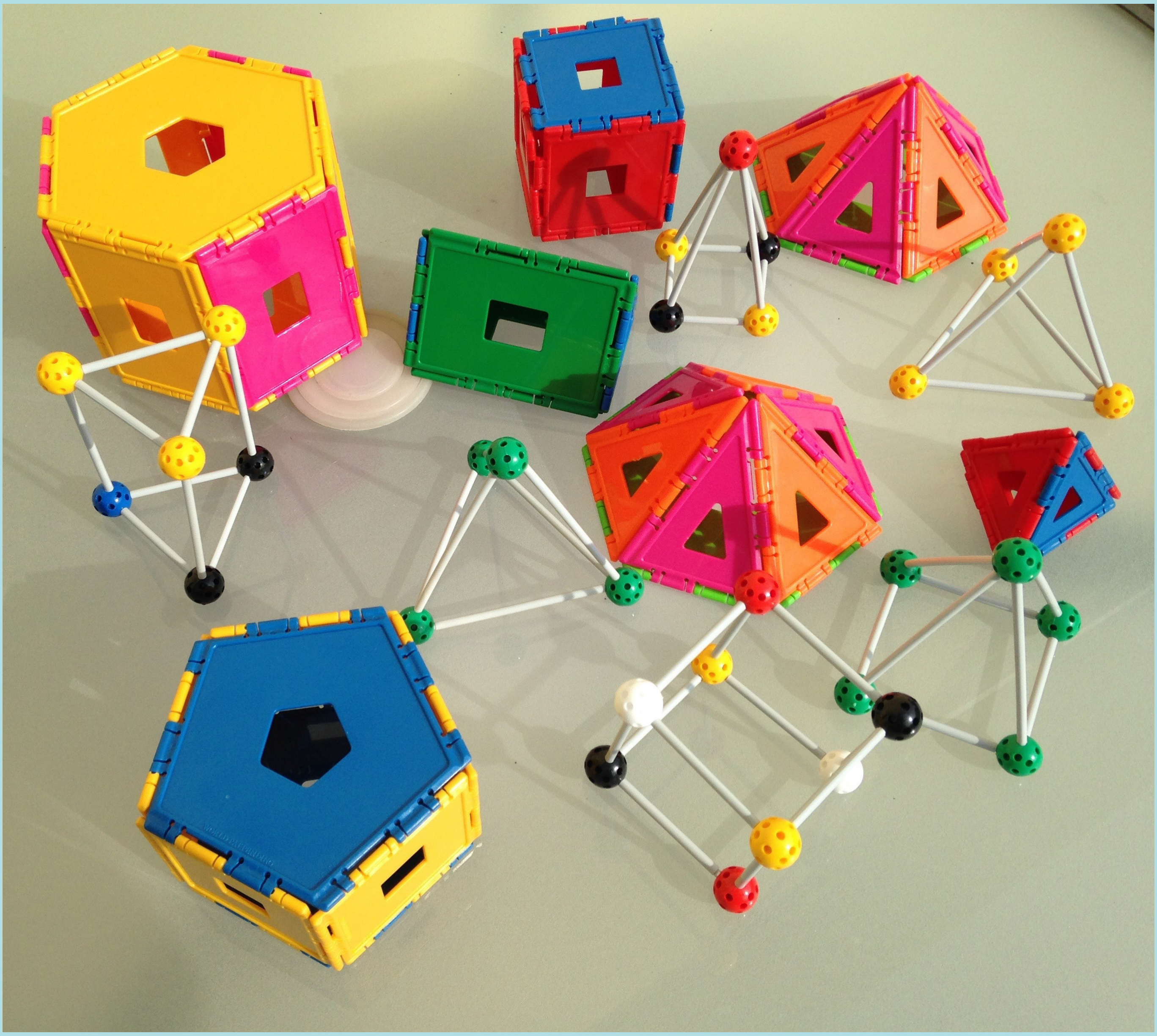
I poliedri tra matematica, geografia e italiano

SUPSI
MATEMATICANDO
A SPASSO CON LA MATEMATICA
PER LE STRADE DI LOCARNO



Titolo
I poliedri tra matematica, geografia e italiano

Autori
Gianfranco Arrigo

Sede di lavoro
Società Matematica della Svizzera Italiana (SMASI)

Età
8 – 15 anni

Parole chiave
Figure solide; sviluppi di un solido; relazioni numeriche; calcolo combinatorio; interdisciplinarità; geografia; italiano.

Questo laboratorio propone cinque postazioni dedicate principalmente ad un lavoro sui poliedri, con l'obiettivo di condurre gli allievi ad intuire alcune importanti proprietà di questi solidi.

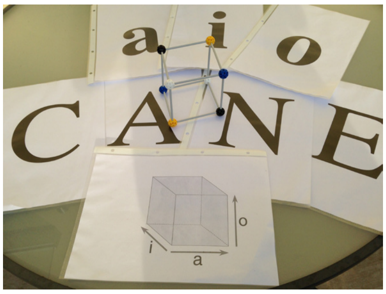
1. Presentazione

Questo laboratorio propone cinque postazioni dedicate principalmente ad un lavoro sui poliedri, con l'obiettivo di condurre gli allievi ad intuire alcune importanti proprietà di questi solidi. Tutte le postazioni si basano sull'osservazione e sulla manipolazione di alcuni modellini compatti o scheletrati di prismi e di piramidi (in alcune si lavora principalmente con il cubo) e propongono delle schede con cui strutturare e guidare un lavoro individuale o di gruppo. Ciascuna delle attività presentate è proposta come lavoro individuale o di gruppo, ma è facilmente adattabile per essere eventualmente svolta con la classe intera. In ogni postazione, inoltre, a discrezione del docente, l'attività può essere sviluppata in più fasi e fino ad un livello di profondità che dipende dall'età e dai prerequisiti degli allievi. Alcune delle attività proposte si relazionano con altre discipline quali l'italiano (Postazione 1: *Anagrammi*) e la geografia (Postazione 5: *Coloriamo*).

2. Descrizione Postazioni

POSTAZIONE 1: ***Anagrammi***

Questa postazione conduce gli allievi alla scoperta di un concetto basilare del calcolo combinatorio: le permutazioni con e senza ripetizioni. L'approccio a questo complesso concetto matematico avviene didatticamente attraverso il gioco enigmistico degli anagrammi.



FASE 1

Gli allievi lavorano individualmente per individuare dei percorsi su un cubo scheletrato (Figura 1).

La consegna è la seguente:

Una formica si trova nel vertice F di un cubo scheletrato. Nel vertice opposto Z vi è uno zuccherino. La formica vuole raggiungere lo zucchero seguendo il percorso più breve.

Quanti diversi percorsi sono possibili, secondo te?

Agli allievi è quindi richiesto di disegnare ogni percorso trovato sulla scheda (Allegato 1.1) ricalcando gli spigoli dei disegni di alcuni cubi scheletrati (ve ne sono 9 a disposizione, ossia un numero sovrabbondante).

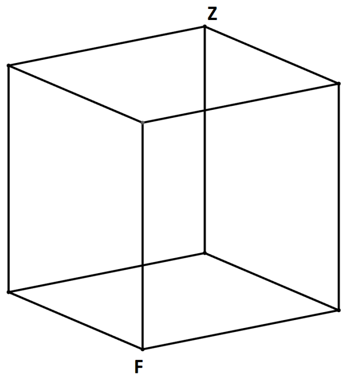


Figura 1. Lo scheletrato di un cubo.

FASE 2

Lavorando sulla scheda (Allegato 1.1) gli allievi codificano i percorsi trovati mediante una parola composta da tre lettere: a (→), i (↖), o (↑), che rappresentano le tre diverse direzioni di percorrenza sugli spigoli del cubo, spostandosi dal vertice F al vertice Z.

Gli alunni eseguono singolarmente la codifica dei percorsi che hanno individuato sul proprio foglio. In seguito, a turno, leggono una delle codifiche ottenute e i compagni devono controllare se l'hanno trovata anche loro e si segnano tutte le codifiche diverse tra loro su un foglio comune.

Prima di procedere, gli allievi condividono le scoperte con l'insegnante che le integra, se necessario, con i percorsi e le codifiche mancanti. È importante che si faccia strada l'idea che tra i percorsi e gli anagrammi esiste una corrispondenza biunivoca: ad ogni percorso possibile corrisponde una e una sola codifica.

Si forniscono, di seguito, alcune possibili domande per aiutare la riflessione:

Quanti percorsi iniziano con a? Quanti con i? Quanti con o?

In totale esistono 6 percorsi diversi, se si considerano solamente i percorsi più brevi (ossia quelli in cui si percorrono tre spigoli) tra tutti quelli possibili. Utilizzando la codifica a (→), i (↖), o (↑) essi sono: aio, aoi, ioa, iao, oia, oai. I percorsi più brevi, tutti diversi tra loro, per andare dal vertice F al vertice opposto Z sono tanti quanti gli anagrammi della parola "aoi" (si vedano le soluzioni nell'Allegato 1.3).

FASE 3

Gli allievi lavorano in gruppo dialogando e usando il supporto della scheda (Allegato 1.2). La richiesta è di trovare quanti sono tutti i possibili anagrammi di alcune parole date. Un'informazione importante da dare agli allievi è che per questa attività non necessariamente si devono trovare parole di senso compiuto nella lingua italiana.

Si inizia con parole composte da lettere tutte diverse tra loro.

Della parola APE (3 lettere) esistono 2×3=6 ossia 3! anagrammi possibili.

Della parola CANE (4 lettere) esistono 4×3×2=24 ossia 4! anagrammi possibili.

Della parola PORTA (5 lettere) esistono 5×4×3×2=120 ossia 5! anagrammi possibili.

Della parola CAMINO (6 lettere) esistono 6×5×4×3×2=720 ossia 6! anagrammi possibili.

Quest'attività favorisce il calcolo mentale. Inoltre, gli allievi possono manipolare dei cartoncini o dei gettoni con le lettere per comporre gli anagrammi.

L'obiettivo è quello di arrivare ad intuire il metodo generale, introducendo il concetto pratico di fattoriale. Gli allievi possono poi usare la calcolatrice per il calcolo del fattoriale.

FASE 4

Prima di procedere gli allievi mostrano all'insegnante quanto ottenuto. A dipendenza dell'età degli allievi, si può proporre una riflessione intermedia, tra il lavoro sugli anagrammi di parole con lettere tutte differenti tra loro (fase 3) e quello sugli anagrammi di parole con lettere ripetute (fase 5).

Si richiede di provare a stimare individualmente il valore del fattoriale di 10 e si propone di verificare con la calcolatrice. Gli allievi rimarranno sorpresi nel trovare che 10! = 3'628'800 e che quindi difficilmente le loro stime si saranno avvicinate a questo valore. La matematica sconfigge il senso comune!

FASE 5

Gli allievi lavorano sulla seconda parte della scheda (Allegato 1.2), in cui si richiede di trovare il numero degli anagrammi di alcune parole che presentano lettere ripetute. Gli alunni possono utilizzare il calcolo a mente, aiutarsi con tesserine o gettoni con le lettere e utilizzare la calcolatrice.

Della parola ORO (3 lettere di cui una ripetuta 2 volte) esistono $\frac{3!}{2!}=3$ anagrammi possibili.

Della parola TUTTO (5 lettere di cui una ripetuta 3 volte) esistono $\frac{5!}{3!}=20$ anagrammi possibili.

Della parola MAMMA (5 lettere di cui una ripetuta 3 volte e una ripetuta 2 volte) esistono $\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$ anagrammi possibili.

Della parola PARALLELA (9 lettere di cui due ripetute ciascuna per 3 volte) esistono $\frac{9!}{3!\cdot 3!}=10'080$ anagrammi possibili.

Della parola TRALLALLA (9 lettere di cui una ripetuta 3 volte e una ripetuta 4 volte) esistono $\frac{9!}{3!\cdot 4!}=2'520$ anagrammi possibili.

Esempi di questo tipo sono decisivi per la comprensione; in tutti i casi si lavora insieme dialogando e manipolando le lettere sui cartoncini o sui gettoni.

Si lavora anche in questa fase sull'intuizione del metodo generale, che si basa sul fattoriale.

FASE 6

In questa fase si propone un lavoro individuale. Con i metodi trovati, ogni allievo è invitato a calcolare il numero di anagrammi del proprio nome, di nomi di amici, di familiari ecc.

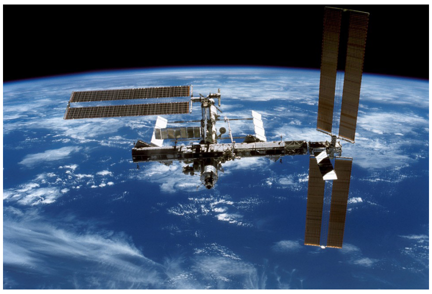
Materiali

Attrezzature: ✓ cubi scheletrati, ✓ calcolatrice o computer, ✓ cartoncini o gettoni con le lettere (per esempio, come nel gioco Scarabeo) per la composizione degli anagrammi.

Materiale cartaceo: schede di lavoro (Allegato 1.1, Allegato 1.2) e soluzioni per l'insegnante (Allegato 1.3).

POSTAZIONE 2: ***Un albergo spaziale (da un'idea di Giancarlo Sonzogni)***

In questa postazione si parte dall'idea di esplorare un albergo nello spazio, a forma di cubo con 27 camere, rappresentate dall'assemblaggio di cubetti tutti uguali. Le facce esterne dei cubetti sono delle finestre che permettono di ammirare le meraviglie dello spazio e ci si interroga sul numero di finestre che può avere ognuna di queste camere.



FASE 1

Gli allievi esplorano delle immagini o video tratti da internet di stazioni spaziali. Alla postazione inoltre è presente un cubo dimostrativo precostruito con 27 cubetti.

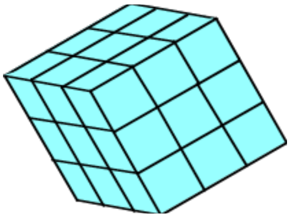


Figura 2. Disposizione delle camere.

La consegna è la seguente:

Una ditta specializzata ha lanciato nello spazio un albergo-satellite. Si compone di camere cubiche che formano un grande cubo. Le pareti esterne delle camere sono finestre che permettono di ammirare le meraviglie dello spazio (Figura 2).

Non tutte le camere però hanno una finestra e ve ne sono che ne hanno di più di altre.

Ci si chiede quante camere ha l'albergo, quante camere hanno una sola finestra che si affaccia sullo spazio, quante ne hanno due, quante ne hanno tre, quante ne hanno quattro. Vi sono camere senza finestre? Quante?

FASE 2

Gli allievi alla postazione lavorano in gruppo. Si mettono a disposizione degli alunni, o si fanno costruire, alcuni cubi formati da 27 cubetti non incollati tra loro e si distribuisce una scheda (si veda l'Allegato 2.1). Gli alunni iniziano a esaminare la situazione delle camere in funzione del numero di finestre che si affacciano sullo spazio e completano la prima tabella proposta sulla scheda.

FASE 3

Si propone un lavoro di estrapolazione, attraverso un lavoro a gruppi. Con una consegna analoga, gli allievi devono esaminare il caso di un albergo formato da 64 camere (eventualmente si costruisce un modellino con i singoli cubetti). Si richiede loro di completare la tabella corrispondente sulla scheda (seconda tabella dell'Allegato 2.1).

FASE 4

Con gli allievi più grandi (scuola media), si può proporre un lavoro di generalizzazione individuale o a gruppi. Si richiede agli allievi di lavorare d'intuizione. Si pongono le stesse domande relativamente a un albergo cubico di 125 camere e, per studenti a partire dalla terza-quarta media, si cerca di estendere la riflessione a un qualsiasi albergo cubico di n^3 camere. A seconda del livello della classe, si completano la terza e la quarta tabella della scheda (Allegato 2.1) e si può richiedere di verificare tramite il calcolo letterale che, nel caso generalizzato, la somma di tutte le camere (con 0, 1, 2, 3 finestre) dà n^3.

Materiali

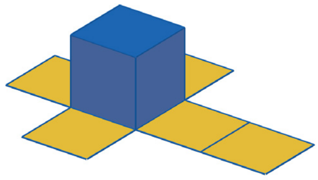
Attrezzature: ✓ scatola con un centinaio di cubetti tutti uguali, meglio se di legno.

Supporti digitali: eventuali immagini o video sui laboratori spaziali.

Materiali cartacei: scheda di lavoro (Allegato 2.1), soluzioni per l'insegnante (Allegato 2.2).

POSTAZIONE 3: ***Sviluppi del cubo***

In questa postazione, mediante l'uso di modellini e di materiale prefabbricato, l'alunno è stimolato a trovare tutti i possibili sviluppi piani del cubo che riprodurrà su una apposita scheda (Allegato 3.1).



FASE 1

Gli alunni hanno a disposizione un cubo di carta precedentemente costruito dall'insegnante. La prima richiesta è di "aprirlo" tagliando lungo gli spigoli, per ottenere una figura unica e piana, costituita da 6 quadrati. È molto probabile che la maggior parte degli allievi otterrà uno tra gli sviluppi più noti del cubo: quello "a croce".
L'insegnante verifica il lavoro svolto dal gruppo prima di passare alla fase successiva.

FASE 2

Gli allievi lavorano individualmente. Ogni alunno riceve un set di 6 quadrati uguali che possono essere facilmente uniti lungo un lato e una scheda (Allegato 3.1) per la registrazione degli sviluppi trovati. La scheda svela che esistono 11 sviluppi del cubo e propone lo sviluppo "a croce" come uno tra i più noti. La consegna è quella di ricercare i rimanenti 10 sviluppi, provando ad assemblare le 6 facce e a "chiudere" il cubo.
In seguito, l'allievo deve disegnare gli sviluppi trovati sulle 10 griglie (nove griglie 3×4, e una griglia 3×5) a disposizione sulla scheda. La scheda suggerisce che uno degli sviluppi richiede una griglia più larga.
L'insegnante, monitorando il lavoro del gruppo, incoraggia, se necessario, una riflessione su eventuali strategie per non procedere sempre a caso, per tentativi ed errori. Per esempio: è inutile formare un quadrato con quattro quadrati perché non si può piegare; al contrario, è utile partire dallo sviluppo a croce e cercare di spostare solo un quadrato. L'insegnante pone delle domande per stimolare la ricerca: *Ci sono altri sviluppi non ottenibili in questo modo? Riuscite a trovare quello che necessita della griglia più larga?*

FASE 3

Segue una fase di confronto nel gruppo delle soluzioni trovate dai singoli allievi, nella quale si eliminano i doppioni (Figura 3), ossia gli sviluppi che si corrispondono mediante un'isometria. Eventualmente, l'insegnante interviene per aiutare gli alunni in questa messa in comune e per completare con gli sviluppi non trovati.

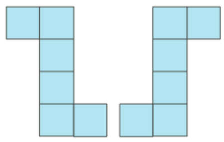


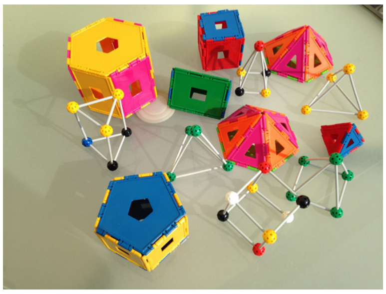
Figura 3: Esempio di doppione, in questo caso due sviluppi simmetrici.

Materiali

Attrezzature: ✓ cubo con sviluppo cartaceo del tipo "a croce", set di 6 quadrati facilmente unibili lungo un lato: esistono in commercio scatole di poligoni di plastica che si prestano bene a questo scopo (l'alunno non deve faticare troppo nell'assemblaggio, altrimenti dopo un po' desiste).
Materiali cartacei: scheda di lavoro (Allegato 3.1), soluzioni per l'insegnante (Allegato 3.2).

POSTAZIONE 4: ***Prismi, piramidi e formula di Eulero***

Questa postazione porta gli allievi a scoprire le caratteristiche di prismi e piramidi (per comodità, regolari), in particolare i loro elementi: vertici, spigoli e facce. L'attività si basa sul conteggio dei vertici, degli spigoli e delle facce di un insieme di solidi proposti con modellini compatti o scheletrati. Dalla sintesi dei risultati, si giunge ad intuire la formula di Eulero, che mette in relazione il numero di vertici, il numero di spigoli e il numero di facce di un poliedro.



FASE 1

Gli allievi giocano a gruppi di 6-8 attorno ad un tavolo, su cui sono disposti diversi modellini di prismi e di piramidi con facce caratteristiche di 3, 4, 5 e 6 lati, sia compatti sia scheletrati. Vi sono più modellini per ogni tipo. Si propone agli alunni di formare delle famiglie a loro piacimento (eventualmente, dire subito che devono concentrarsi sulla forma e non su proprietà fisiche come ad esempio il peso o il colore). Di solito vengono formate 5 o 6 famiglie: ad esempio, gli allievi potrebbero mettere in una stessa famiglia i poliedri che hanno la stessa faccia caratteristica, o lo stesso numero di facce. Si rilancia poi il lavoro esigendo la formazione di due famiglie soltanto.

FASE 2

Segue una discussione nel gruppo gestita dall'insegnante che, intervenuto a verificare le famiglie create dagli alunni, lancia la riflessione. Sceglie la famiglia dei prismi (anche se non completa) e sceglie un prisma rappresentativo (di solito pentagonale o esagonale). Partendo dalle descrizioni dei bambini, si mettono in risalto le caratteristiche essenziali: il solido ha due facce caratteristiche uguali e parallele unite da un fascio di spigoli paralleli che determinano facce rettangolari uguali. Si fa la stessa cosa con l'altra famiglia (quella delle piramidi).

Di solito succede che il prisma triangolare, adagiato su una faccia rettangolare, venga messo con le piramidi. Si suggerisce all'insegnante di cogliere quest'occasione, qualora si presenti, per rafforzare i concetti di prisma e piramide.

FASE 3

La discussione collettiva prosegue alla scoperta di una piramide particolare, il tetraedro regolare, e di un prisma particolare, il cubo, cioè solidi "non rovesciabili". A questo scopo, si suggerisce di raccontare la storiella della carovana che attraversa il deserto e, giunta la sera, si accampa. Si rappresenta sul tavolo l'accampamento con alcune tende piramidali, fra le quali un tetraedro. Si continua con il racconto: di notte, un forte vento si abbatte sull'accampamento rovesciando tutte le tende. Si incarica un alunno di rovesciarle una dopo l'altra facendo in modo che alla fine rimanga solo il tetraedro. L'allievo lo rovescia, ma non cambia nulla: l'insegnante lo invita a riprovare, ma di nuovo non cambia nulla. Si scopre così una proprietà importante di questa particolare piramide, che chiamiamo tetraedro regolare (dal greco, *tetráedron*, composto da *tétra* = 'quattro' e *hédra* = 'faccia').

In seguito a questa scoperta, si pone la domanda: anche nei prismi ce n'è uno che non si lascia rovesciare? Qui, di solito, gli allievi indicano subito il cubo, detto anche esaedro (dal greco, *esa* = 'sei' e *hédra* = 'faccia'). È importante riflettere sull'etimologia di un termine quando lo si introduce, in modo che acquisisca senso per gli allievi.

FASE 4

Gli allievi lavorano a coppie sulla scheda (prima tabella dell'Allegato 4.1), avendo la possibilità di servirsi dei modellini in ogni momento. La richiesta è quella di contare gli elementi (vertici, spigoli e facce) di una lista di solidi, per esempio: prisma triangolare, cubo o parallelepipedo, prisma pentagonale, prisma esagonale, tetraedro, piramide quadrangolare, piramide pentagonale e piramide esagonale.

FASE 5

Gli alunni lavorano a coppie sulla scheda (seconda tabella dell'Allegato 4.1). La consegna è la stessa della fase 4, relativamente ad altri solidi, ma senza la possibilità di manipolare i modellini presenti. È quindi un lavoro di estrapolazione. Per esempio, si può lavorare con: prisma e piramide ottagonale, prisma e piramide endecagonale.

FASE 6

L'attività termina con una messa in comune nel gruppo, gestita dall'insegnante, in cui si prendono in esame le tabelle ottenute dalle varie coppie di allievi. Si osserva che il numero di spigoli è nettamente maggiore di quello dei vertici e delle facce. Si suggerisce che questi due ultimi numeri, se "messi insieme", si avvicineranno al numero di spigoli.

Per ogni solido studiato, si calcola quindi la somma del numero dei vertici e del numero delle facce. Si osserva che in tutti i casi considerati la differenza tra questa somma e il numero degli spigoli è sempre 2, arrivando così a congetturare che: vertici + facce = spigoli + 2, ossia la formula di Eulero per i poliedri. Ogni alunno scrive infine una frase che descriva questa uguaglianza.

Materiali

Attrezzature: ✓ modellini di prismi e di piramidi (compatti e scheletrati).

Materiali cartacei: scheda di lavoro (Allegato 4.1), soluzioni per l'insegnante (Allegato 4.2).

POSTAZIONE 5: *Coloriamo*

In questa postazione, si osservano alcune cartine geografico-politiche e si contano quanti colori sono stati usati, tenendo presente che due regioni confinanti non possono essere dello stesso colore. Si pone quindi la domanda di fondo: si potrebbero usare meno colori? Attraverso esercizi mirati (si veda l'Allegato 5.1) gli alunni sono portati a intuire che 4 colori bastano per qualsiasi cartina. Questa intuizione è stata avuta per la prima volta nel 1852 da uno studente di nome Francis Guthrie, e dimostrata solo nel 1977 da parte di Kenneth Appel e Wolfgang Haken, due matematici dell'Università dell'Illinois, grazie all'impiego di un complesso algoritmo informatico.

FASE 1

Come introduzione all'attività, gli allievi possono consultare documenti cartacei e/o video e sono invitati a contare il numero di colori utilizzati su una cartina geografico-politica, per esempio della Svizzera, e a stimare il numero minimo di colori necessario. Si sottolinea che due regioni confinanti non devono avere lo stesso colore (per distinguerle). Con gli alunni ci si può accontentare del senso comune di "confinanti". Rigorosamente, si intendono due regioni che hanno un tratto di confine in comune, escluso il caso di un unico punto in comune.

FASE 2

Gli allievi lavorano individualmente su alcune cartine da colorare e in seguito sulla scheda (Allegato 5.1). Sono proposte tre diverse pavimentazioni di una regione di piano. La richiesta è di colorarle con il numero minimo di colori necessari e in modo che due regioni confinanti non abbiano lo stesso colore. Nel quarto riquadro, si richiede all'allievo di disegnare una pavimentazione a suo piacimento e di colorarla.
Gli allievi sono portati a riflettere su quanti colori hanno utilizzato e su quale pavimentazione ne ha richiesti di più.

FASE 3

Viene distribuita la scheda in Allegato 5.2 e si mettono a disposizione sul tavolo di lavoro diversi modellini di prismi e di piramidi. L'attività propone una colorazione con le stesse regole della fase precedente ma su figure solide.
La scheda inizia con una domanda: mantenendo le stesse regole per la colorazione delle facce di un poliedro, all'aumentare del numero di facce, dovrebbe aumentare anche il numero minimo di colori necessario per colorare tutte le facce del solido?
Per lanciare l'attività l'insegnante può proporre una prima riflessione sul caso del cubo, che è il più semplice. Successivamente lascia che gli alunni provino, manipolando i modellini, a completare la scheda.
Gli allievi devono indicare, per ogni solido, il numero di lati della sua faccia caratteristica e il numero minimo di colori necessario per colorare tutte le sue facce in modo che due facce confinanti non siano dello stesso colore.
I casi del prisma 17-gonale e della piramide 18-gonale sono una prima generalizzazione adatta agli alunni della scuola elementare. La generalizzazione algebrica è invece pensata solo per gli studenti della scuola media. L'importante è che gli allievi arrivino ad osservare che se la faccia caratteristica del solido ha un numero pari di lati, allora sono necessari 3 colori; se invece la faccia caratteristica del solido ha un numero dispari di lati, allora sono necessari 4 colori.

FASE 4

In una fase conclusiva di messa in comune nel gruppo, eventualmente gestita dall'insegnante, gli alunni dovrebbero arrivare ad osservare che il numero minimo di colori necessario a colorare una cartina, una pavimentazione del piano o le facce di un solido non è mai superiore a 4. A seconda dell'età degli allievi, si può proporre in chiusura dell'attività una spiegazione storica del "teorema dei quattro colori".

Materiali

Attrezzature: ✓ cartine geografico-politiche (ad esempio, del Canton Ticino con i distretti – attenzione all'enclave di Campione d'Italia; o della Svizzera con i cantoni; o altre a piacimento); ✓ modellini di prismi e piramidi.
Supporti digitali: un computer connesso ad internet per cercare su Google le immagini di cartine geografiche.
Materiali cartacei: schede di lavoro (Allegato 5.1 e Allegato 5.2), soluzioni per l'insegnante nell'Allegato 5.3.

3. Spazi necessari

Tavolo con 6-8 postazioni di lavoro, o un'aula con banchi predisposti per il lavoro a gruppi.

Bibliografie e sitografia

Arrigo, G., & Sbaragli, S. (2004). *I solidi. Riscopriamo la geometria*. Roma: Carocci Faber.
Cottino, L., & Sbaragli, S. (2005). *Le diverse "facce" del cubo*. Roma: Carocci Faber.
https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_dei_quattro_colori

I poliedri tra matematica, geografia e italiano
Dipartimento formazione e apprendimento,
Scuola universitaria professionale della svizzera italiana (SUPSI).
Autori: Gianfranco Arrigo

Una pubblicazione del progetto *Communicating Mathematics Education*
Finanziato dal Fondo nazionale svizzero per la ricerca scientifica.
Responsabile del progetto: Silvia Sbaragli,
Centro competenze didattica della matematica (DdM).

I testi hanno subito una revisione redazionale curata
dal Centro competenze didattica della matematica (DdM).

Grafica: Jessica Gallarate
Servizio Risorse didattiche, eventi e comunicazione (REC)
Dipartimento formazione e apprendimento - SUPSI

Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana
SUPSI

FONDS NATIONAL SUISSE
SCHWEIZERISCHER NATIONALFONDS
FONDO NAZIONALE SVIZZERO
SWISS NATIONAL SCIENCE FOUNDATION