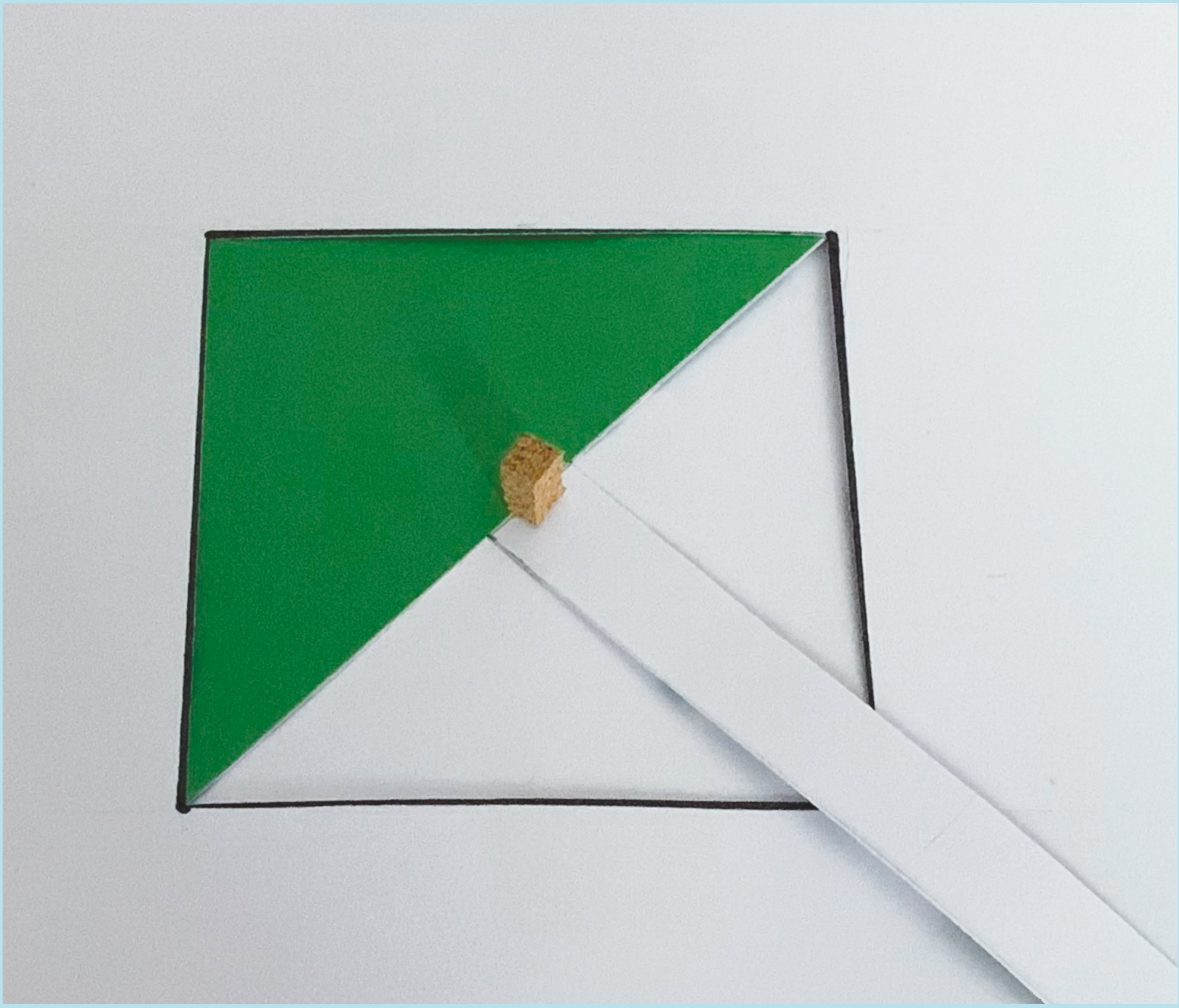
Girando dentro una cornice quadrata... cosa può succedere?



Titolo
Girando dentro una cornice quadrata... cosa può succedere?

Autori
Anna Maria Facenda, Ianna Nardi, Floriana Paternoster, Daniela Rivelli, Daniela Zambon (Mathesis Pesaro)

Sede di lavoro
Ex docenti di matematica nella scuola primaria e secondaria

Età
9 – 14 anni

Parole chiave
Modelli dinamici; figure piane; quadrilateri; triangoli; argomentazione

Proponiamo un percorso laboratoriale realizzato con l'utilizzo di modelli dinamici da noi ideati, alla scoperta di proprietà e relazioni tra quadrilateri e triangoli.

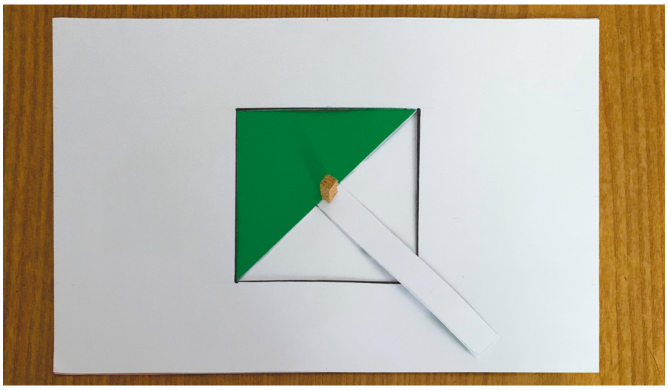
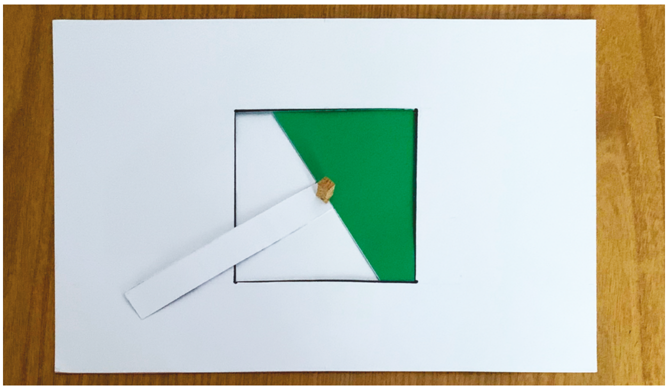
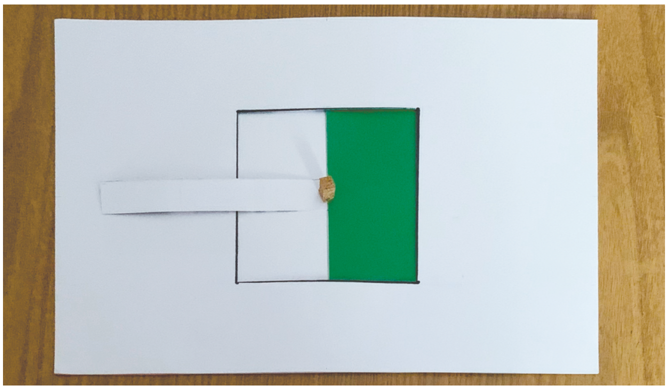
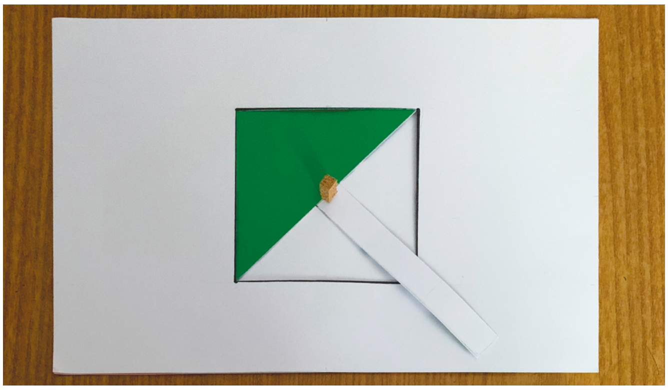
1. Presentazione

L'attività che presentiamo si sviluppa intorno a due modelli dinamici, cioè due artefatti con elementi mobili di argomento geometrico, che gli alunni costruiscono sotto la guida degli insegnanti. Si tratta di rappresentazioni di "oggetti" matematici, che gli alunni possono manipolare, osservandone le variazioni ed elaborando congetture. La manipolazione dei modelli consente di generare una serie di figure geometriche, quadrilateri e triangoli, che si trasformano una nell'altra e delle quali è interessante indagare le proprietà; si possono anche individuare le relazioni tra le figure stesse, metterne a fuoco varianti ed invarianti, confrontare aree e perimetri. Fondamentale nell'attività è il ruolo della verbalizzazione, sia a livello individuale che di discussione collettiva; si tratta di un elemento qualificante nell'ambito del quadro teorico di riferimento del percorso. Altra caratteristica del laboratorio è l'importanza dell'esperienza pratica, della percezione, dell'osservazione: soprattutto a livello di scuola dell'obbligo è necessario, a nostro avviso, partire da qui per poi compiere un salto qualitativo verso l'astrazione e la generalizzazione. Non va trascurato poi, il fatto che i modelli dinamici, in quanto oggetti materiali, sono un ulteriore registro di rappresentazione, che si affianca al disegno e alla verbalizzazione. Non è necessario che gli alunni abbiano svolto precedenti esperienze con l'utilizzo di modelli dinamici; abbiamo proposto questa attività sia a classi già "esperte" di lavoro con i modelli sia a classi che erano al loro primo contatto con tali materiali.

2. Descrizione Fasi

1

FASE 1: ***Costruzione del primo modello***
Ogni alunno deve avere a disposizione i materiali necessari per la costruzione del primo modello e procedere al montaggio, così che ciascuno abbia il proprio materiale di lavoro. Per il dettaglio e la costruzione, si veda Allegato 1.

Prima consegna

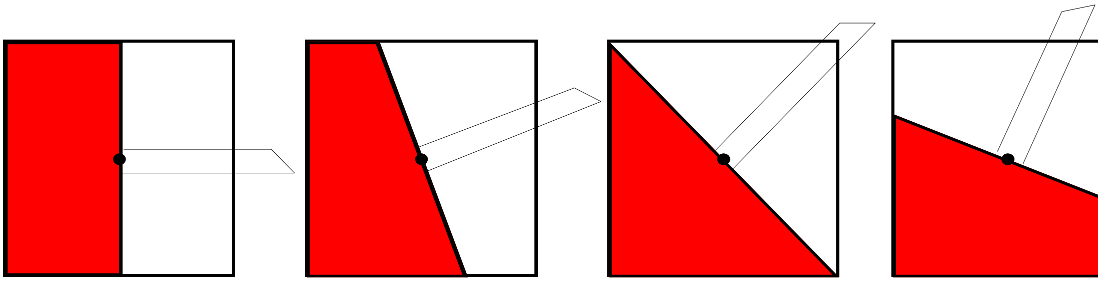
Ruota la linguetta e osserva le figure che si formano nella cornice quadrata.

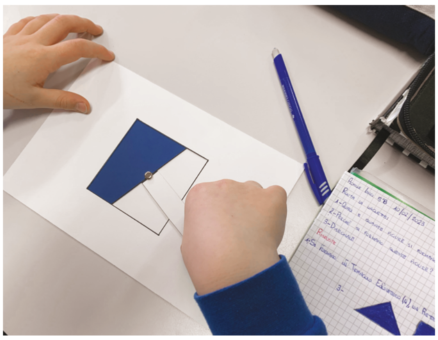
Descrivile: che tipo di figure si formano? Perché? Quante di ogni tipo?

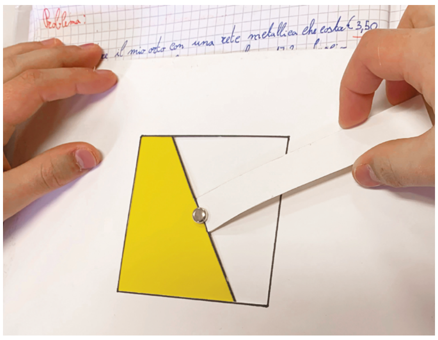
Gli alunni rispondono individualmente sul loro foglio, lavorando per circa 15 minuti; è possibile, se lo si desidera, confrontarsi con i compagni prima di rispondere. Al termine del tempo assegnato, segue la discussione, gestita dal docente; vengono lette alcune delle risposte e su quelle si apre il dibattito.

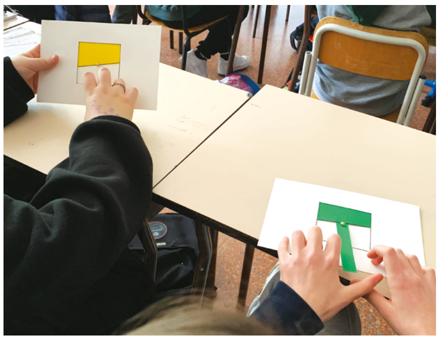
In genere, il riconoscimento delle figure che si formano è immediato: rettangoli, trapezi rettangoli, triangoli rettangoli isosceli.

In una rotazione della sagoma di 360°, si individuano: quattro rettangoli, quattro triangoli rettangoli isosceli e infiniti trapezi rettangoli. Nell'utilizzo dei due modelli emergono perciò riferimenti ad alcune isometrie: rotazione, simmetria centrale e simmetria assiale. È possibile che gli alunni non abbiano ancora conoscenze in merito, nel momento in cui si svolge l'esperienza; ciò non rappresenta un problema, anzi: si può cogliere l'occasione per introdurre questi argomenti in maniera motivata ed immediatamente utile. Se invece la classe ha già familiarità con le isometrie, le osservazioni sui modelli consentono di recuperare e rivedere in situazione le conoscenze acquisite.





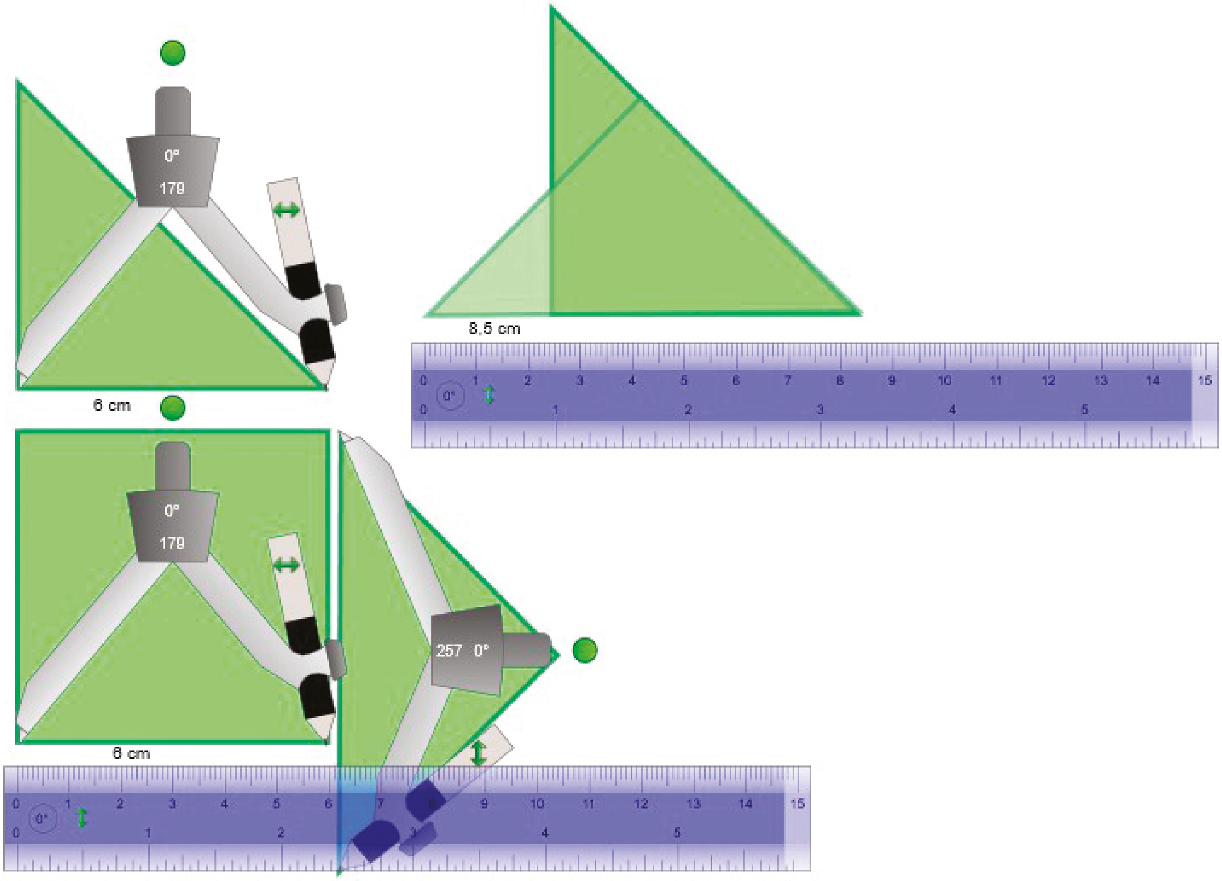




Gli alunni si rendono conto che la tipologia delle figure che si formano è determinata dalla forma quadrata della cornice; ad esempio, se la cornice fosse stata rettangolare, si sarebbero formati triangoli rettangoli scaleni. Nell'Allegato 2 si riporta un breve dialogo con gli allievi sulla questione dell'infinito numero di figure che vengono a creare. Nella discussione si prende anche in esame la relazione tra queste figure: si può ad esempio pensare che il rettangolo è un trapezio rettangolo "particolare". Questa osservazione permette di indagare più a fondo le definizioni dei quadrilateri, scoprendo che alcuni sono "casi particolari" di altri. Inoltre si può chiedere come si può ottenere un trapezio rettangolo da un triangolo, ad esempio tagliandone un pezzo, in modo parallelo ad uno dei lati. Sono interessanti anche eventuali osservazioni sugli angoli delle figure: quanto misurano gli angoli del triangolo rettangolo isoscele? È facile rispondere se si sa che la somma degli angoli di un triangolo è 180°: si sottraggono i 90° dell'angolo retto e si divide il resto a metà.

Seconda consegna
Osserva di nuovo le figure che si formano ruotando la linguetta.
Secondo te, hanno o non hanno la stessa area?
Hanno o non hanno lo stesso perimetro? Giustifica le tue risposte.

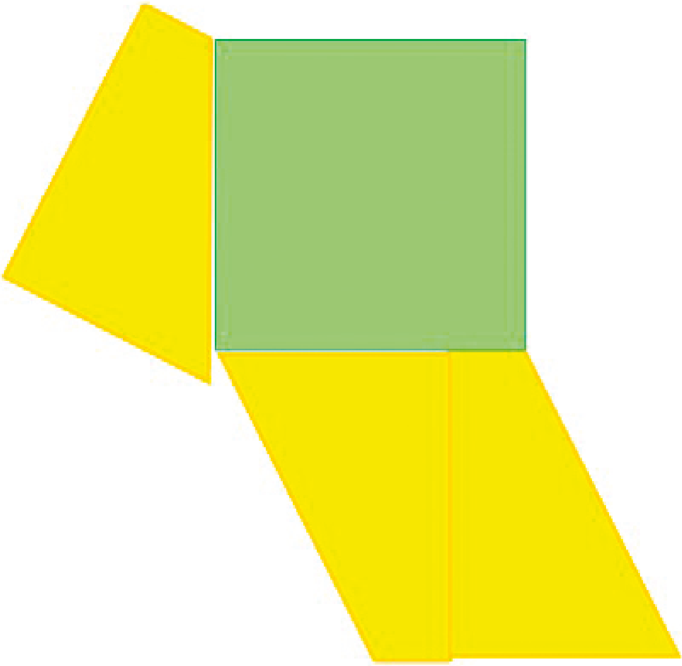
Per quanto riguarda l'area, in genere i ragazzi intuiscono senza difficoltà che è la stessa, in quanto tutte le figure sono metà del medesimo quadrato, avendo tutte un lato che passa per il centro e gli altri che si trovano sui lati della cornice quadrata. Se fosse necessario convincere maggiormente gli allievi che la figura colorata è la metà dell'intero quadrato si può richiedere di ripassare su carta velina i contorni della figura colorata e di quella bianca, ritagliarle e verificare attraverso sovrapposizione che le figure sono congruenti. Dunque essendo sempre metà di uno stesso intero, tutte le figure colorate che si creano dalla rotazione della sagoma devono necessariamente avere la stessa area. Questa osservazione può facilmente influenzare le risposte relative al perimetro: non pochi alunni concludono che, essendo sempre uguale l'area, altrettanto deve accadere per i perimetri. A questo punto si può aprire una discussione, anche perché le variazioni del perimetro sono più difficilmente individuabili. Conviene esaminare una alla volta le figure che si formano, iniziando ad esempio dal rettangolo. Questo ha il perimetro formato da due lati congruenti al lato del quadrato e due pari ciascuno alla metà del lato del quadrato stesso. Se ne può concludere che il perimetro del rettangolo è tre volte il lato del quadrato. Nel triangolo rettangolo isoscele i due cateti sono lati del quadrato, l'ipotenusa è ovviamente più lunga perché è la diagonale del quadrato stesso.
È possibile verificarlo praticamente con l'aiuto di un compasso, misurando, oppure sovrapponendo un cateto e l'ipotenusa di due sagome uguali, ritagliate su carta.



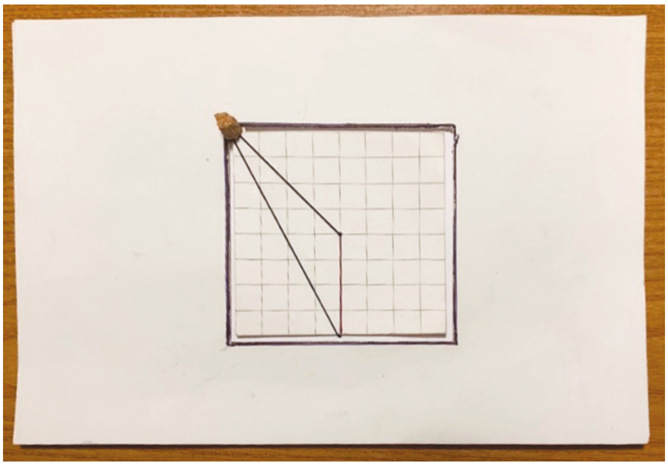
Vediamo ora i trapezi: un lato è uguale al lato del quadrato, la somma delle lunghezze dei due lati paralleli è uguale alla lunghezza del lato del quadrato; il quarto lato è ovviamente maggiore del lato del quadrato ma minore della sua diagonale.
Pertanto, il perimetro di una qualsiasi figura generata è compreso tra un minimo (perimetro del rettangolo) e un massimo (perimetro del triangolo rettangolo).
Questa attività può fornire lo spunto per una prima introduzione al linguaggio algebrico, richiedendo agli allievi di "tradurre" in simboli le conclusioni a cui sono arrivati. Ad esempio, il fatto che il perimetro del rettangolo sia composto da due lati del quadrato più due "mezzi lati" può essere espresso

$$P = l + l + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l$$

che facilmente diventa: $P = l + l + l = 3l$.
Si può riflettere con gli alunni sul fatto che l'utilizzo delle lettere al posto delle misure consente di staccarsi dal caso specifico e di esprimere una generalizzazione (infiniti casi).



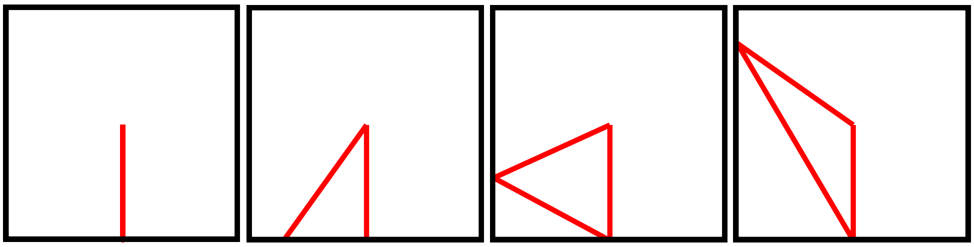
FASE 2: ***Costruzione del secondo modello***
Per la costruzione del modello, si veda Allegato 3.

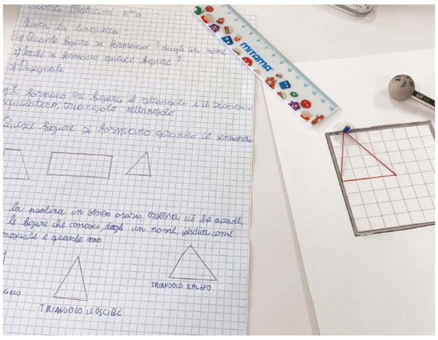


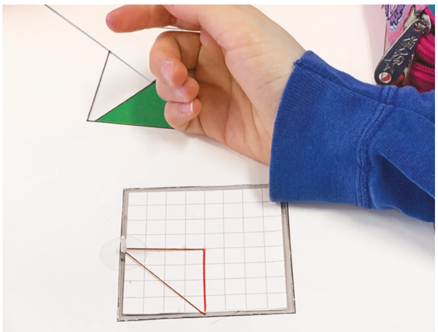
Prima consegna

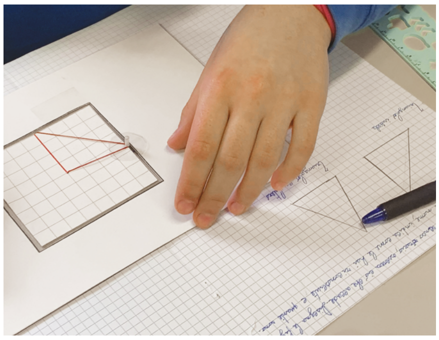
Fai scorrere la puntina nella scanalatura e osserva le figure che si formano nella cornice quadrata. Descrivile: che tipo di figure si formano? Perché? Quante di ogni tipo?

Anche in questo caso, gli alunni lavorano per circa 15 minuti, singolarmente o a coppie; al termine, vengono lette alcune risposte e si apre la discussione. I ragazzi in genere riconoscono che le figure che si formano sono tutti triangoli, di diverse tipologie.
È indifferente far ruotare la puntina in senso orario o in senso antiorario; dopo la rotazione di 180° le figure si ripresentano simmetricamente. Si parte dalla situazione “segmenti sovrapposti” (assenza di figura piana), quindi si ottengono infiniti triangoli rettangoli finché la puntina non raggiunge il primo vertice della cornice quadrata. In questa posizione, il triangolo rettangolo è anche isoscele. Continuando il percorso si formano triangoli scaleni acutangoli, un triangolo isoscele acutangolo (quando il vertice mobile è a un quarto del lato della cornice quadrata), un triangolo rettangolo isoscele (quando il vertice mobile è a metà del lato della cornice quadrata) e poi di nuovo triangoli scaleni però ottusangoli. Continuano i triangoli scaleni ottusangoli fino a quando la puntina avrà percorso una rotazione di 180°, per cui si ottiene un triangolo degenere, in cui un lato è uguale alla somma degli altri due. È possibile, con opportuni materiali (sono sufficienti anche delle semplici striscioline di carta) presentare altri casi di poligoni degeneri, ad esempio quadrilateri.
Da questo punto in poi le figure si ripresentano simmetricamente.
Non tutti gli alunni si rendono conto che la situazione di partenza è di “assenza” della figura, perché manca il terzo lato; può essere l’occasione per riflettere, durante la discussione, su qual è il numero minimo di lati necessari per avere un poligono e qual è (se c’è) il numero massimo. A questo proposito, in genere i ragazzi intuiscono facilmente che continuando ad aumentare il numero dei lati si arriva “al limite” al cerchio. Nel caso di “triangolo degenere” la situazione è diversa: qui il terzo lato c’è e si sovrappone agli altri due, adiacenti. Infatti abbiamo un triangolo con un angolo di 180° e gli altri due nulli.

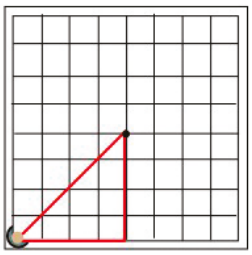




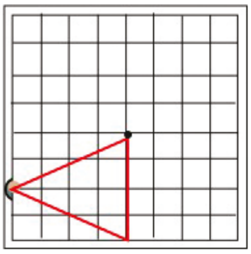




Nell’esaminare la tipologia dei triangoli che si formano, è facile che si discuta sul momento di “passaggio” da triangoli scaleni acutangoli a triangoli scaleni ottusangoli; gli alunni osservano che la transizione avviene attraverso un triangolo rettangolo, che è anche isoscele ma poiché non è in posizione “canonica” non sempre viene individuato.

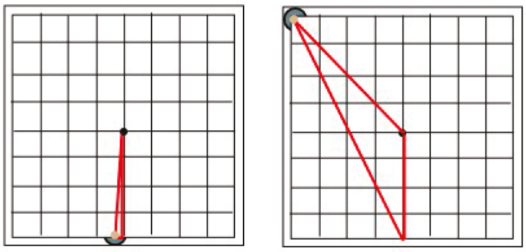


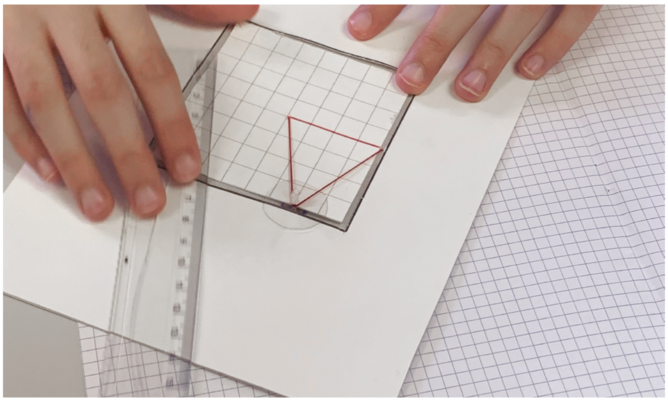
Ancora più difficile da riconoscere è il triangolo isoscele acutangolo che si forma quando il vertice mobile è in posizione corrispondente ad un quarto del lato della cornice.

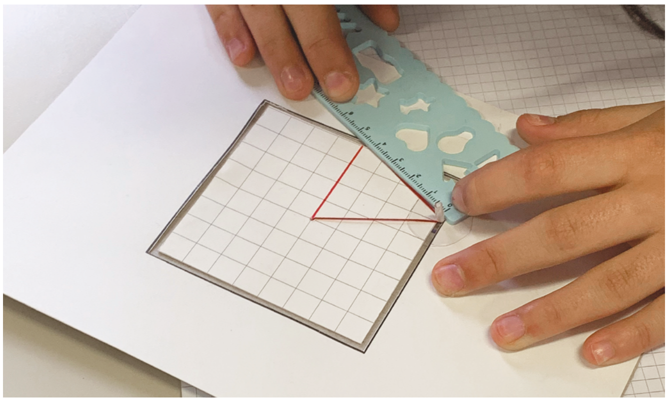


Seconda consegna
Osserva le figure che si formano nel percorso della puntina. Secondo te, hanno o non hanno la stessa area? Hanno o non hanno lo stesso perimetro? Giustifica le tue risposte.

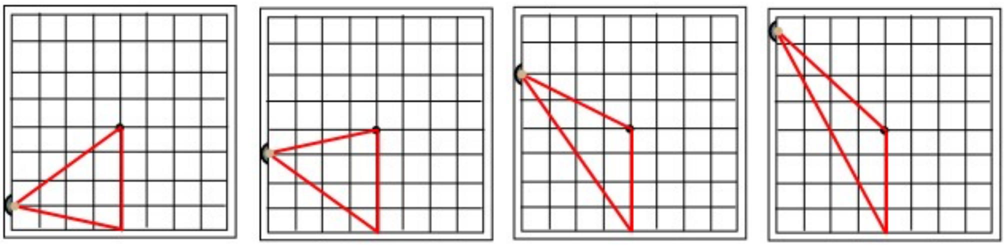
È facile capire che il perimetro cambia, aiutati anche dalla tensione dell'elastico; oggetto di discussione è invece quale figura ha perimetro massimo e quale perimetro minimo. Inizialmente i ragazzi tendono ad individuare il minimo nella posizione di partenza, dove però non si può parlare di perimetro perché non c'è la figura. Allora gli alunni dicono che il minimo è "vicinissimo" al punto di partenza, forse in una prima intuizione ingenua del concetto di limite. La tensione dell'elastico permette di riconoscere facilmente la posizione di massimo. Gli allievi possono poi verificare attraverso la misurazione.



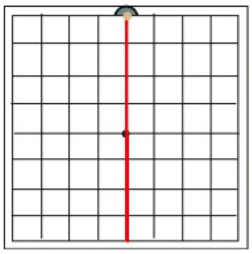




Riguardo all'area, per la minima si fanno le stesse considerazioni del perimetro riguardo alla figura di partenza, osservando inoltre che l'area nulla si ottiene quando la puntina compie una rotazione di 180° (triangolo degenere); poi l'area aumenta in maniera evidente finché la puntina non arriva a coincidere con il primo vertice del percorso. A questo punto, si susseguono infiniti triangoli equiestesi. Si veda anche l'Allegato 4.



Dopo il vertice successivo e fino alla figura degenere l'area va diminuendo; il minimo si raggiunge nella figura degenere, in cui l'area è zero.
Per arrivare a queste conclusioni, i ragazzi sono facilitati se si decide a priori di considerare come lato di riferimento dei triangoli il segmento disegnato; a questo punto è sufficiente tenere sotto controllo la variazione dell'altezza relativa per ricostruire esattamente l'andamento dell'area.



Materiali
I materiali necessari per la costruzione dei modelli utilizzati sono di facile reperibilità ed economici. È consigliabile che l'insegnante abbia i suoi modelli, sia quelli costruiti dagli allievi nel corso del laboratorio, sia altri eventualmente utili come modelli di appoggio o controesempi.

Attrezzature:
- cartoncino,
- filo elastico,
- puntine da disegno,
- forbici e taglierino,
- cartoncino di tipo F4,
- strumenti da disegno,
- due pezzetti di sughero,
- foglio di carta colorata,
- colla stick,
- carta quadrettata al centimetro,
- una tavoletta di compensato o plastica pesante per non danneggiare la superficie del banco.

3. Spazi necessari

L'attività si può svolgere in aula, in quanto gli alunni possono lavorare al loro banco, sia singolarmente che a coppie.

Bibliografia

http://mathesispesaro.altervista.org

Castelnuovo, E. (1963). *Didattica della matematica*. La Nuova Italia.

Barra, M., & Castelnuovo, E. (1976). *Matematica nella realtà*. Bollati-Boringhieri.

Facenda, A. M., Nardi, J., & Zambon, D. (2010). Osservare, riconoscere, giustificare figure geometriche: proposta didattica con modelli dinamici e Cabri. *L'educazione Matematica, 2*, 43 – 62.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Gabellini, G., Masi, F., Nardi, J., & Paternoster, F. (2002). Piegando un quadrato: prima parte. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 25A*(1), 7 – 34.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Gabellini, G., Masi, F., Nardi, J., & Paternoster, F. (2002). Piegando un quadrato: seconda parte. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 25A*(2), 111 – 132.

Girando dentro una cornice... cosa può succedere?
Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica,
Scuola universitaria professionale della svizzera italiana (SUPSI).
Autori: Anna Maria Facenda, Ianna Nardi, Floriana Paternoster, Daniela Rivelli,
Daniela Zambon (Mathesis Pesaro)

Una pubblicazione del progetto *Communicating Mathematics Education*
Finanziato dal Fondo nazionale svizzero per la ricerca scientifica.
Responsabile del progetto: Silvia Sbaragli,
Centro competenze didattica della matematica (DDM).

I testi hanno subito una revisione redazionale curata
dal Centro competenze didattica della matematica (DDM).

Grafica e impaginazione: Jessica Gallarate
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica - SUPSI

Girando dentro una cornice... cosa può succedere?
è distribuito con Licenza Creative Commons
Attribuzione - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale

Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana
SUPSI

Fondo nazionale
svizzero