Giochi di probabilità

SUPSI
MATEMATICANDO
A SPASSO CON LA MATEMATICA
PER LE STRADE DI LOCARNO

Titolo
Giochi di probabilità

Autori
Gianfranco Arrigo, Gabriella Antonini e Bernardo Mutti

Sede di lavoro
Società Matematica della Svizzera Italiana (SMASI)

Età
5 – 14 anni

Parole chiave
Probabilità; incertezza; estrazioni; lancio di dadi; gioco d'azzardo

Il laboratorio si sviluppa in 10 postazioni. Gli obiettivi principali sono: portare gli allievi a capire la differenza tra probabilità oggettiva e soggettiva, convincerli della negatività del gioco d'azzardo, capire la definizione di probabilità di un evento riferita a un insieme di eventi possibili finito e ragionevolmente limitato.

1. Presentazione

Il laboratorio si sviluppa in 10 postazioni differenziate in base all'età degli allievi. Per ognuna è indicato il livello scolastico adatto. In generale gli obiettivi principali delle attività proposte sono:

- portare gli allievi a capire la differenza tra probabilità oggettiva e soggettiva,
- convincere gli allievi della negatività del gioco d'azzardo,
- capire la definizione di probabilità di un evento riferita a un insieme di eventi possibili finito e ragionevolmente limitato.

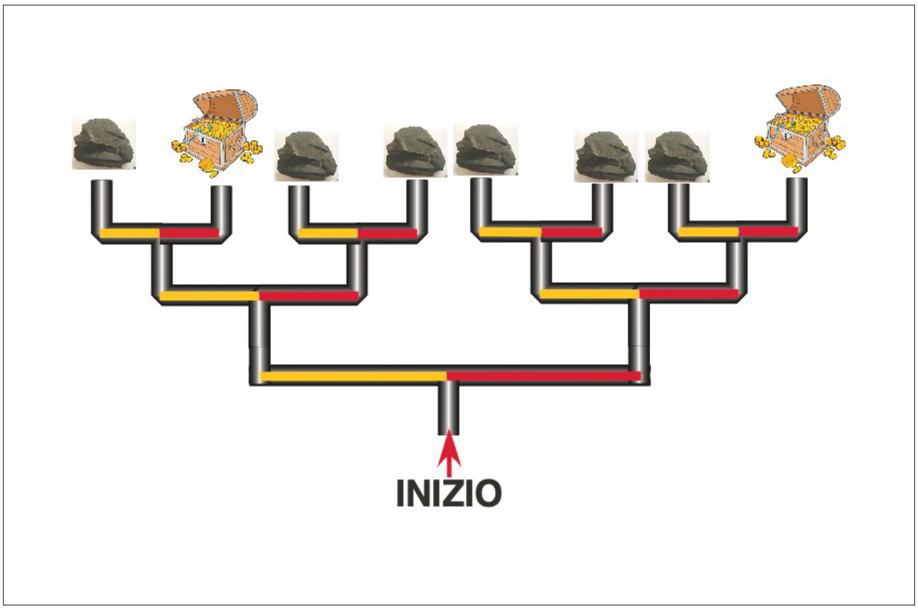
2. Descrizione Postazioni

POSTAZIONE 1. Caccia al tesoro

▷ Adatta ad allievi di SI

L'obiettivo dei bambini è di arrivare al tesoro (vedi la figura sotto). Si parte dall'inizio e a ogni bivio si deve scegliere tra due uscite: una gialla e una rossa. Sul tavolo si trovano tre dadi, uno con 3 facce gialle e 3 rosse (3g/3r), uno con 2 facce gialle e 4 rosse (2g/4r) e uno con 4 facce gialle e 2 rosse (4g/2r), ricavabili da un dado da gioco con le facce preventivamente colorate. Per decidere in che direzione continuare, ogni giocatore deve scegliere uno dei tre dadi e lanciarlo. La faccia gialla o rossa che appare segna la strada da prendere.
Si possono anche variare le posizioni dei tesori e dei carboni e il loro numero.

Il percorso può essere più o meno lungo di quello che appare in figura o anche disegnato su un pavimento in modo che i bambini possano percorrerlo a piedi (Allegato 1).
Di solito, all'inizio, i bambini scelgono i dadi casualmente o seguendo criteri estetici o emotivi. Dopo un po' qualcuno inizia a scegliere i dadi 4g/2r o 2g/4r a seconda di dove si trova.
Queste scelte sono già di tipo probabilistico, anche se il bimbo non fa alcun calcolo. Siamo di fronte a primi fenomeni di probabilità soggettiva che, fra l'altro, i bambini quotidianamente esercitano quando scommettono con i propri amici o stimano sul da farsi: "Vado o non vado?", "Faccio o non faccio?", "Lo dico o non lo dico?" ecc.



POSTAZIONE 2. Il matematico nascosto

▷ Adatta ad allievi di I e II SE

Attraverso una introduzione dialogata si chiariscono gli avverbi: possibile, impossibile, certo e si propone un lavoro individuale su scheda (Allegato 2). Si può osservare che la seconda domanda potrebbe suggerire la presenza di un'influenza emotiva sulla logica dell'allievo che risponde. Nell'attività presente, questo fenomeno, riscontrato più volte, si verifica quando oltre alla risposta corretta – sono possibili i nomi BOMBIERI, BOURBAKI e BOMBELLI – il soggetto aggiunge una sua preferenza scelta fra i tre indicati.

Nello schema sottostante è nascosto il nome di un matematico.

B	O						I

Domande.
- Quali dei nomi indicati in tabella potrebbe essere quello nascosto?
(rispondi nella tabella con **possibile/impossibile/certo**)

- Qual è il più probabile? ....

BORELLI	BOMBIERI	BONFERRONI	BOURBAKI	BOLYAI	BOMBELLI

POSTAZIONE 3. Il tredicesimo lancio

▷ Adatta ad allievi di SE e SM

Si dispongono gli alunni a coppie. Ogni coppia riceve una monetina e un foglio per annotare i risultati (T testa – C croce) che ottengono con un numero di lanci, ad esempio tra il 10 e il 20 o anche di più (è importante che comincino a vedere il comportamento di una serie di eventi aleatori). Dopo di che si distribuisce una scheda da completare individualmente (Allegato 3).
Di solito le risposte degli alunni delle elementari si distribuiscono su tutte e tre le possibilità e non sempre la terza risposta (che è la corretta) raccoglie più preferenze. Questa situazione può essere proposta a qualsiasi soggetto che non abbia studiato i fondamenti della probabilità matematica. A soggetti adulti occorre dire che la moneta non è truccata e a loro si possono proporre situazioni più intriganti. Ad esempio, è possibile che con infiniti lanci di una moneta si ottengano in sequenza 1'000 (o un milione, un miliardo, …) risultati tutti T?

Ecco i risultati ottenuti da un vostro amico con 12 lanci.

T T C T T C T T T T T T ?

Domanda.
Secondo te, quale risultato otterrà l'amico nel tredicesimo lancio? (scegli una risposta)

- ☐ T perché è il suo momento fortunato
- ☐ C perché deve recuperare
- ☐ T o C con la stessa probabilità

POSTAZIONE 4. Gioco dell'oca: un finale emozionante

▷ Adatta ad allievi di II, III, IV, V SE e SM

Questa attività prevede una simulazione del finale del gioco dell'oca. Gli allievi hanno a disposizione una scheda che presenta la situazione (Allegato 4).

Chi osserva la situazione in modo superficiale è propenso a considerare C colui che ha più probabilità di vincere; chi si accorge che C ha una sola possibilità di vincere (punteggio 1+1) di solito sceglie B, ma raramente le scelte iniziali degli alunni cadono sul concorrente A, perché, ritengono, "è troppo indietro". Per rispondere con sicurezza occorre contare quante possibilità di vincere ha ciascun giocatore. Questo porta a scomporre le distanze in somme di due addendi:

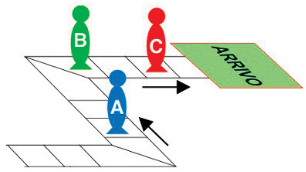
C deve ottenere 2 per vincere, quindi ha una sola possibilità: $2 = 1 + 1$.

B deve ottenere 4 per vincere, quindi ha tre possibilità: $4 = 1 + 3$, $4 = 3 + 1$, $4 = 2 + 2$.

A deve ottenere 7 per vincere, quindi ha 6 possibilità ed è così il concorrente favorito:

$7 = 1 + 6$, $7 = 6 + 1$, $7 = 2 + 5$, $7 = 5 + 2$, $7 = 3 + 4$, $7 = 4 + 3$.

Se l'allievo sa calcolare la probabilità di eventi in situazioni limitate, può trovare che i risultati possibili sono $6 \times 6 = 36$ (visibile ad esempio con un semplice diagramma ad albero) e può rispondere che $p(C) = \frac{1}{36}$, che $p(B) = \frac{3}{36}$ e che $p(A) = \frac{7}{36}$.



Ogni giocatore a turno lancia 2 dadi a sei facce e avanza di tante caselle quant'è la somma dei punti ottenuti.
Vince colui che arriva **esattamente** sulla casella ARRIVO. Se nessuno ci arriva, si parte daccapo.

Quale giocatore (A, B, C) ha maggiore probabilità di vincere col prossimo lancio?

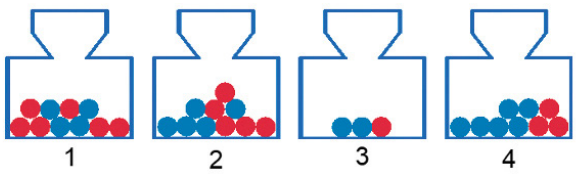
POSTAZIONE 5. Pescare da un'urna

▷ Adatta ad allievi di SE e I SM

Si propongono 4 urne il cui contenuto è visibile con l'ausilio di una scheda (Allegato 5) o con 4 vasetti di vetro trasparente contenenti biglie di due colori.

Dal lato probabilistico, le urne 3 e 4 offrono la stessa probabilità di pescare una biglia rossa ($\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$). Per contro, esperienze internazionalmente svolte testimoniano che gli alunni preferiscono l'urna 4 perché in essa vedono più biglie rosse (Arrigo, 2010). È una misconcezione che si riscontra anche in allievi che sarebbero già in grado di calcolare le rispettive probabilità.

Quanto all'urna 2, non tutti gli allievi vedono l'equiprobabilità e indicano come più probabile l'estrazione di una biglia rossa o blu, a seconda delle loro preferenze.



Si stabilisce che chi estrae una pallina rossa da un'urna (resa opaca) vince un premio.

Domande

Da quale urna preferiresti pescare e perché? ....
....

Hai solo le urne 3 e 4. Da quale delle due preferiresti pescare? Perché? ....
....

Che cosa dici dell'urna 2? ....
....

POSTAZIONE 6. Corsa dei cavalli A

▷ Adatta ad allievi di SE

Si distribuisce a ciascun gruppo di allievi un tavolo di gara (Allegato 6) e si spiegano le regole del gioco. Ad ogni gara partecipano tre fantini che possono scegliere il proprio cavallo fra i tre disponibili: uno bianco, uno nero e uno grigio.
Il direttore della gara tiene un sacchetto con 2 palline bianche e 2 palline nere. Si fissa la lunghezza della gara (massimo 10 passi).
Ad ogni passo, il direttore estrae 2 palline a caso.
Se le palline sono entrambe bianche, avanza di un passo il cavallo bianco. Se le palline sono entrambe nere, avanza di un passo il cavallo nero. Se risulta una pallina bianca e una nera, avanza di un passo il cavallo grigio.
Vince il cavallo che arriva per primo al traguardo prefissato e il fantino riceve un premio.
Durante le gare si nota subito che il cavallo grigio vince sempre, anzi stravince, ciò che non fa piacere a chi era riuscito ad avere un cavallo bianco o nero che esteticamente piacciono di più rispetto al “povero grigio” che nessuno vuole.

Nasce quindi la curiosità di capire il perché. La spiegazione può essere data dalla figura seguente:

●●	●○	○●	○○

Le possibilità sono 4. I cavalli bianco e nero hanno 1 possibilità su 4 di vincere, mentre il grigio ne ha 2 su 4. In termini di probabilità, bianco e nero hanno ambedue la probabilità $\frac{1}{4}$ = 0,25 = 25% di vincere, mentre il grigio ha probabilità doppia di vincere: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ = 0,5 = 50%.

Se qualcuno non capisse perché ci sono due possibilità di estrarre una biglia bianca e una nera, si possono estrarre le palline una dopo l’altra. È allora chiaro che le due possibilità sono “nera la prima / bianca la seconda” e “bianca la prima / nera la seconda”.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	FREQ.	PROB.
BIANCO												
NERO												
GRIGIO												

Si fa una corsetta di prova, poi si procede alle gare. Dopo alcune gare, tutti gli alunni sono invitati a riflettere sulle probabilità di vittoria di ciascun cavallo.

POSTAZIONE 7. Corsa dei cavalli B

▷ Adatta ad allievi di IV e V SE e SM

Questa postazione è una variante della postazione 6, in cui il direttore della corsa dispone di tre dadi. I concorrenti sono 5 e hanno a disposizione un tavolo di gara e una scheda per lo studio della situazione (Allegato 7). Ognuno sceglie un cavallo (o una pedina). A ogni passo il direttore lancia i dadi, si sommano i punteggi e il concorrente avanza di un passo:

- il cavallo A se la somma è un numero multiplo di 3,
- il cavallo B se la somma è un numero multiplo di 4,
- il cavallo C se la somma è un numero multiplo di 5,
- il cavallo D se la somma NON è un numero multiplo né di 3, né di 4, né di 5,
- il cavallo E se la somma è un numero dispari.

Vince chi arriva per primo al passo 12.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A m(3)												
B m(4)												
C m(5)												
D Non m(3,4,5)												
E (2n+1)												

Questa gara è piuttosto combattuta. Si possono premiare i primi tre, nell'ordine, con medaglie d'oro, argento e bronzo. Dopo aver sperimentato, gli allievi possono completare la scheda dell'Allegato 7 per lo studio della situazione in modo da poter confrontare le probabilità teoriche con ciò che è concretamente accaduto nelle varie gare e dedurre il significato dei valori di probabilità.

Cavalli \ Punti	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	F	P
A m(3)																		
B m(4)																		
C m(5)																		
D NON m(3,4,5)																		
E (2n+1)																		

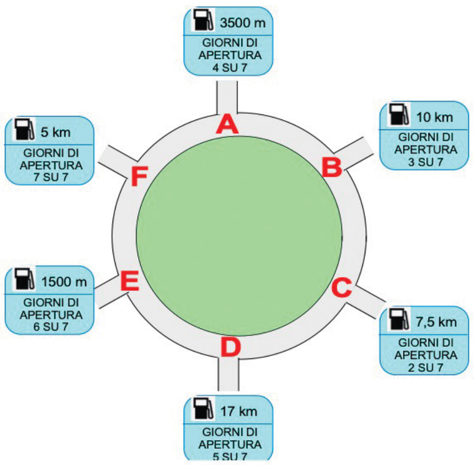
Nelle caselle vuote si mette una x se il cavallo corrispondente può fare un passo in avanti.

Nella colonna F (frequenze assolute) si mette il totale di x presenti per ogni cavallo.
Nella colonna P si mette la probabilità di vincere di ciascun cavallo, che è uguale a F/216, cioè la frequenza fratto il totale dei casi possibili che sono 6^3=216.

POSTAZIONE 8. L'automobilista straniero

▷ Adatta ad allievi di III, IV e V SE e SM

In questa attività ci si immedesima in un automobilista straniero che non conosce affatto le nostre strade. Non appena entrato in una rotatoria vede sul cruscotto che la sua autonomia concernente il carburante si rivela essere …… km (il dato può essere scelto a piacimento). Purtroppo non conosce i dati che noi possiamo leggere sul tavolo da gioco (Allegato 8). Decide di affidarsi al caso e imbocca un'uscita.



Domanda
Qual è la probabilità che l'automobilista raggiunga una stazione di servizio aperta prima di rimanere fermo col serbatoio vuoto?

Con gli allievi si possono analizzare alcune differenti situazioni a dipendenza del numero di km che si legge sul cruscotto. Ad esempio:

a) Con autonomia di 5 km

Delle 6 uscite ce ne sono 3 che potrebbero permettere di arrivare a una stazione di servizio:

- a 3500 m, aperta 4 giorni su 7;
- a 5 km giusti, aperta tutti i giorni;
- a 1500 m, aperta 6 giorni su 7.

La probabilità di raggiungere una stazione aperta è:

$$p(a) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{7} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7} = \frac{17}{42} \cong 0{,}405 = 40{,}5\%$$

b) Con autonomia di 20 km

Tutte e 6 le stazioni sono raggiungibili senza problemi, ma:

- una è aperta 4 giorni su 7;
- una è aperta tutti i giorni;
- una è aperta 6 giorni su 7;
- una è aperta 5 giorni su 7;
- una è aperta 2 giorni su 7;
- una è aperta 3 giorni su 7.

La probabilità di raggiungere una stazione aperta è:

$$p(b) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{7} + \frac{7}{7} + \frac{6}{7} + \frac{5}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7}\right) = \frac{27}{42} = \frac{9}{14} \cong 0{,}643 = 64{,}3\%$$

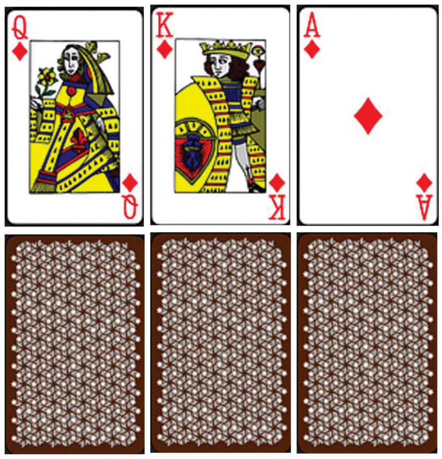
c) Con autonomia di 1 km

Nessuna uscita permette di giungere a una stazione di servizio:

$$p(c) = 0$$

POSTAZIONE 9. Monty Hall

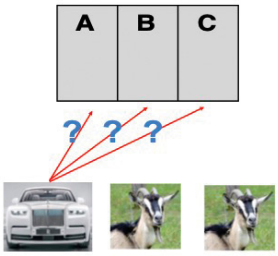
▷ Adatta ad allievi di V SE e SM



Si tratta di un gioco proposto su un canale TV negli USA nel programma «Let's Make a Deal» dal presentatore Monty Hall (nome d'arte). In scena ci sono tre box: in uno c'è un'auto di lusso, negli altri una capra. Il presentatore invita il concorrente a scegliere un box. Se sceglie quello giusto, l'auto è sua.

Ma il presentatore non apre subito la porta indicata e propone al concorrente di cambiare la sua scelta. Se accetta di cambiare, il presentatore apre una porta che cela una capra e invita il concorrente ad aprire l'ultima porta rimasta chiusa (Allegato 9).

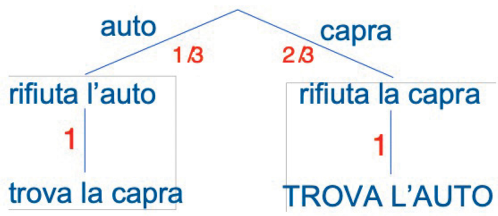
Conviene accettare la proposta del presentatore?



In scena ci sono tre box: in uno c'è un'auto di lusso, negli altri una capra.
Il presentatore invita il concorrente a scegliere un box. Se sceglie quello giusto, l'auto è sua. Ma il presentatore non apre subito la porta indicata e propone al concorrente di cambiare la sua scelta.
Se accetta di cambiare, il presentatore **apre una porta che cela una capra** e invita il concorrente ad aprire la porta rimasta chiusa.
Conviene accettare la proposta del presentatore?

Per provare a immaginare la situazione si possono utilizzare delle carte da gioco: ad esempio, due figure per rappresentare le capre e un asso per l'auto, che il presentatore mostrerà girate.

Dopo che ciascun allievo ha espresso la propria idea, il docente può suggerire l'utilizzo di un diagramma ad albero per analizzare la probabilità:



Si deduce che se il giocatore rimane sulla sua prima scelta, ha probabilità $\frac{1}{3}$ di vincere l'auto.

Se accetta la proposta del presentatore, ha probabilità $\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$ di vincere l'auto.

POSTAZIONE 10. Il gioco della zara

▷ Adatta ad allievi di V SE e SM

Si tratta di un gioco diffuso nel Medioevo anche nelle nostre regioni. I giocatori scommettevano su un numero da 3 a 18 (somma dei punti che escono da tre dadi), quindi il direttore lanciava i tre dadi. Vinceva chi aveva scommesso sulla somma uscita.
La domanda che ogni giocatore si faceva era: su quale somma mi conviene scommettere?
Si propone la stessa situazione agli allievi a cui si chiede di calcolare la probabilità di ogni somma possibile. Per prima cosa, diciamo che ogni dado ha 6 risultati possibili, quindi in totale si possono verificare 6 x 6 x 6 = 216 casi.
Di questi ce ne saranno alcuni che daranno la stessa somma di altri. Per capire meglio, pensiamo che i dadi abbiano colori diversi, per esempio rosso, azzurro e nero.

In quanti modi può verificarsi la somma 3?
(1,1,1) in un solo modo.

In quanti modi può verificarsi la somma 6?
(1,1,4), (1,4,1), (4,1,1) in 3 modi, a seconda di dove si situa il 4, (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1) in 3! = 3 x 2 = 6 modi, (2,2,2), in un solo modo.
In totale la somma 6 si può verificare in 3 + 6 + 1 = 10 modi.

Ecco un possibile schema risolutivo che per comodità si ferma alla somma 10. Dalla 11 alla 18 i valori seguono simmetricamente [per esempio: p(11) = p(10) , p(12) = p(9) ecc.].

Somma	3	4	5	6	7	8	9	10	da 11 a 18
Addendi	(1,1,1)	(1,1,2)	(1,1,3) (1,2,2)	(1,2,3) (1,1,4) (2,2,2)	(1,1,5) (1,2,4) (1,3,3) (2,2,3)	(1,1,6) (1,2,5) (1,3,4) (2,2,4) (2,3,3)	(1,2,6) (1,3,5) (1,4,4) (2,3,4) (2,2,5) (3,3,3)	(1,3,6) (1,4,5) (2,3,5) (2,4,4) (2,2,6) (3,3,4)	segue simmetricamente
Frequenze	1	3	6	10	15	21	25	27	segue simmetricamente
Probabilità	1/216	3/216	6/216	10/216	15/216	21/216	25/216	27/216	segue simmetricamente

Infine, la zara è anche un gioco d'azzardo. Per mettere gli alunni in grado di poter capire a quale destino va incontro il giocatore incallito, si può organizzare qualche simulazione di gioco.
Ogni giocatore riceve alcuni gettoni (da 3 a 5) come capitale iniziale. Per giocare ogni volta deve pagare un gettone, tranne quando nessuno vince.
In Allegato 10 si trova il tabellone delle scommesse sul quale ogni giocatore pone un suo segno distintivo sul numero che vuole scommettere.
Poi il direttore annuncia la fine del tempo dedicato alle scommesse e procede con il lancio dei tre dadi.
(Variante: ognuno può scommettere al massimo su 3 numeri, pagando 2 o 3 volte la posta.)

11	6	15	14
10	18	3	7
5	16	9	12
17	8	13	4

Per capire la situazione si può utilizzare la seguente scheda per lo studio.

SCOMMESSE POSSIBILI	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
FREQUENZE TEORICHE	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1
PROBABILITÀ FRAZIONE (su 216)																
PROBABILITÀ DECIMALE																
VINCITA STABILITA DAL BANCO	5				1		1				1		5			
VINCITA LIBERA																

La scheda è da completare con i valori di probabilità (in forma frazionaria e decimale). Nell'ultima riga ci si può divertire cambiando l'ammontare delle vincite.
A titolo di curiosità, la sequenza più in uso nel Medioevo per stabilire la vincita, al posto di 5/1/1/1/5 indicata in tabella, era m/0/0/0/m, con m multiplo della posta stabilito dal banco.

Materiali
Attrezzature:
- ✓ dadi.

Materiali cartacei:
- ✓ schede e tavoli da gioco da stampare e plastificare (Allegato 1, Allegato 2, Allegato 3, Allegato 4, Allegato 5, Allegato 6, Allegato 7, Allegato 8, Allegato 9, Allegato 10).

3. Spazi necessari

Ogni postazione richiede uno o due tavoloni, a seconda della numerosità dei gruppi di allievi.

Bibliografia e sitografia

Adler, I. (1969). *Statistique et probabilités pour aujourd'hui*. OCDL.

Arrigo, G. (2010). Le misconcezioni degli allievi di scuola primaria relative al concetto di probabilità matematica. Rapporto di ricerca. *BDM, 60*, 59 – 82.

Arrigo, G. (2023). *Insegnare matematica con i concetti fondanti nella scuola primaria*. Lisciani Scuola.

Eastaway, R., & Wyndham, J. (2003). *Probabilità, numeri e code. La probabilità nascosta nella vita quotidiana*. Dedalo.

Engel, A. (1973). *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Band 1*. Klett.

Packel, E. (1993). *Matematica dei giochi e dell'azzardo*. Zanichelli.

https://www.smasi.ch/

Giochi di probabilità
Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica,
Scuola universitaria professionale della svizzera italiana (SUPSI).
Autori: Gianfranco Arrigo, Gabriella Antonini e Bernardo Mutti

I testi hanno subito una revisione redazionale curata
dal Centro competenze didattica della matematica (DDM).

Grafica e impaginazione:
Servizio risorse didattiche e scientifiche, eventi e comunicazione (REC)
SUPSI - Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica

Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana
SUPSI