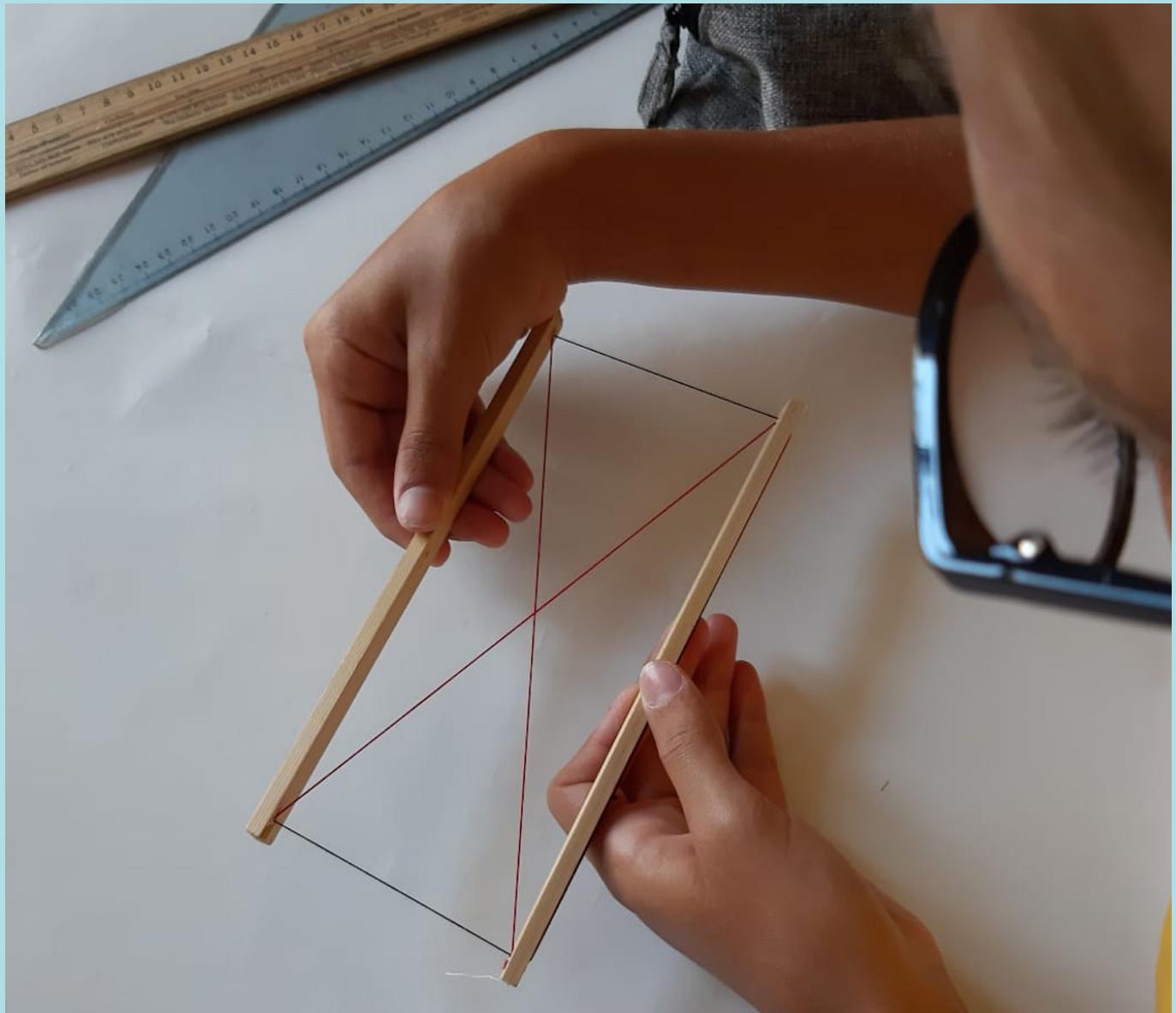


# Osservo, imparo, definisco: i parallelogrammi



## **Titolo**

Osservo, imparo, definisco: i parallelogrammi

## **Autori**

Anna Maria Facenda, Paola Fulgenzi, Janna Nardi, Flavia Paternoster, Daniela Rivelli, Daniela Zambon (Mathesis Pesaro)

## **Sede di lavoro**

ex docenti di matematica nella scuola primaria e secondaria

## **Età**

7-14 anni

## **Parole chiave**

Modelli dinamici; figure piane; argomentazione; definizione

Il percorso didattico che proponiamo riguarda le definizioni ed è stato realizzato nelle classi con l'ausilio di modelli dinamici, cioè artefatti di argomento geometrico articolabili e/o dotati di elementi mobili.

## 1. Presentazione

Il percorso didattico che proponiamo riguarda le definizioni ed è stato realizzato nelle classi con l'ausilio di modelli dinamici, cioè artefatti di argomento geometrico articolabili e/o dotati di elementi mobili.

Alcuni dei modelli utilizzati sono ben noti, in quanto proposti già dalla grande didatta Emma Castelnuovo; altri sono di nostra creazione. L'idea centrale è quella di considerare la definizione di una figura non come punto di partenza, ma come punto di arrivo; non si parte quindi da una o più formulazioni date "preconfezionate" dall'insegnante ma si tende a far sì che siano gli allievi stessi a costruire le definizioni, anche più di una per ogni figura geometrica considerata, a seconda di quale elemento della figura stessa viene messo in primo piano. Attraverso tentativi, errori, ed aggiustamenti successivi si vuole superare la semplice elencazione delle proprietà delle figure e arrivare a selezionare le proprietà – necessarie e sufficienti – da "condensare" in vere e proprie definizioni. Ciò consente di trattare le figure geometriche non come entità separate ma di inserirle in una trama di relazioni che conduce ad elaborare un sistema di classificazione inclusivo. Nelle fasi di lavoro individuale, gli alunni, guidati dal docente, muovono i modelli; individuano varianti ed invarianti, selezionano proprietà e formулano proposte di definizioni. Queste vengono poi sottoposte al vaglio critico della classe e del docente, durante i momenti di discussione collettiva; per confutare o validare le proposte vengono utilizzati altri modelli, che fungono da esempi "di appoggio" o da controesempi, a seconda dei casi. Si sottolinea che, soprattutto con gli alunni più piccoli, la metodologia laboratoriale descritta di seguito consente di introdurre in maniera motivata – e quindi più efficace – la terminologia geometrica; inoltre, le fasi di discussione collettiva richiedono un impegno non trascurabile per verbalizzare in modo chiaro, corretto e non ambiguo i risultati delle proprie riflessioni. Ne consegue uno stimolo continuo a rendere il proprio

linguaggio specifico sempre più ricco e preciso.

Il quadro di riferimento della proposta didattica rimanda ai seguenti presupposti metodologici:

- nella scuola dell'obbligo, le esperienze sono la piattaforma di partenza imprescindibile per muovere verso l'astrazione e la generalizzazione;
- pertanto, i modelli si pongono come ulteriore registro di rappresentazione (complementare al disegno, alla verbalizzazione e al linguaggio simbolico) per accedere agli "oggetti" matematici;
- l'attività di apprendimento matematico deve diventare il più possibile una scoperta guidata, da compiere anche attraverso il confronto e la collaborazione con il docente e con il gruppo dei pari;
- verbalizzazioni, discussione, formulazione di congetture e loro verifica sono parte integrante del processo di apprendimento.

Le successive fasi del percorso proposto arricchiscono progressivamente il quadro concettuale che si forma di fronte agli allievi e con il loro essenziale apporto; in ogni fase viene specificato il livello scolastico al quale l'attività è rivolta.

Le classi nelle quali è stato realizzato il percorso avevano già, almeno in gran parte, esperienza di modelli dinamici e non; i ragazzi possedevano perciò una prima conoscenza – almeno visuale e non strutturata – dei quadrilateri da nominare e descrivere. Grazie alla rilettura costante dei verbali (o "diari di lavoro") che registravano le discussioni, le attività da svolgere sono state costantemente monitorate e rimodulate quando necessario. Si è sempre voluto infatti tenere conto dei contributi degli alunni, anche se "ingenui", per reindirizzare i passi successivi.

Ulteriori approfondimenti metodologici e didattici sono contenuti negli allegati alla scheda.

## 2. Descrizione Fasi

### FASE 1: Costruzione del modello "Quadrato/Rombo articolabile"

Ogni alunno riceve 8 legnetti forati agli estremi, e alcune piccole viti con relativo bulloncino oppure dei fermacampioni. I legnetti possono essere assortiti in due modi diversi: 4 più corti, uguali tra loro e 4 più lunghi, sempre uguali tra loro oppure 3 di una misura e 5 dell'altra.

#### Prima consegna

- Dovete montare un quadrato, scegliete il materiale adatto;
- scrivete le motivazioni della scelta usando, se necessario, anche dei disegni.



Gli alunni lavorano individualmente per 10 minuti. Al termine del tempo assegnato mostrano il loro lavoro e alcuni espongono le motivazioni della scelta durante una discussione collettiva.

Si veda [Allegato 1](#) per un approfondimento sulla questione del numero dei legnetti e sulle motivazioni espresse dagli alunni.

Seconda consegna

- Vi sarete accorti che il modello non è rigido. Articolandolo quali altre figure si formano? Quante di ogni tipo e perché?
- Perché, tra tutte le figure che si formano, una sola la chiami quadrato?

Puoi arricchire la tua risposta con dei disegni.



#### **Modello “Quadrato/Rombo articolabile”**

In base alla nostra esperienza, è probabile che si debba spiegare il significato del verbo “articolare”, non solo agli alunni più piccoli. Dopo 10-15 minuti di lavoro individuale (a seconda della classe), gli allievi vengono invitati a leggere le loro risposte, che vengono confrontate e discusse. In merito alla tipologia delle figure individuate dagli alunni, si rileva che molti citano genericamente i parallelogrammi (senza specificare, cioè, che si tratta di rombi); evidentemente è prevalente il condizionamento derivante dal fatto che i bambini vedono mentalmente e presentano le figure “appoggiate” su un lato, e non nella posizione in cui vengono solitamente rappresentati i rombi. L’uguaglianza dei lati, quindi, pur essendo ben nota ai ragazzi in quanto ha orientato la loro scelta dei legnetti, passa in secondo piano ed è necessario in genere che l’insegnante la richiami esplicitamente. Qualche alunno osserva che “il parallelogramma non c’è, viene con il rettangolo”; è utile allora avere a disposizione il seguente modello mostrato nelle seguenti figure:

#### **Modello “Rettangolo/Parallelogramma articolabile”, utile come esempio di appoggio**

Esso consente di riflettere sul rapporto tra generico parallelogramma e rombo (parallelogramma “speciale” perché ha in più i lati uguali), mettendo in evidenza che in tutte le figure citate si riscontra il parallelismo dei lati opposti.

Si vedi [Allegato 2](#) per una sintesi dei risultati e della discussione di classe; sono riportati brani dei diari di lavoro.

Terza consegna

L’insegnante scrive ora alla lavagna alcune frasi, che dovranno essere completate collettivamente e discusse. Le frasi rappresentano altrettante possibili definizioni di “quadrato” ma ognuna ha un diverso insieme di riferimento; ciò consente di mettere in rilievo le relazioni che legano il quadrato stesso ad altri quadrilateri, in un’ottica inclusiva di classificazione. Va specificato che, nel completare le frasi, tra gli elementi della figura è ammesso citare solo lati e angoli.

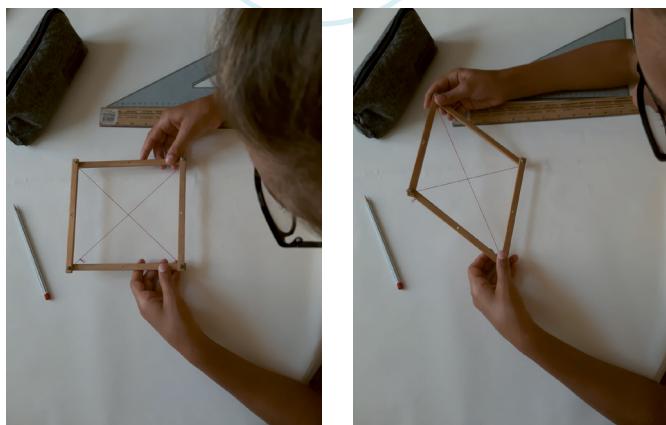
1. Un quadrato è un poligono che ha .....
2. Un quadrato è un quadrilatero che ha .....
3. Un quadrato è un parallelogramma che ha .....
4. Un quadrato è un rombo che ha .....

Nelle formulazioni proposte dagli alunni, le frasi 2) e 3) risultano analoghe (“quadrilatero con lati uguali e angoli retti” / “parallelogramma con lati uguali e angoli retti”). In realtà, se si fa riferimento al parallelogramma è sufficiente citare un solo angolo retto: se un parallelogramma ha un angolo retto, infatti, lo sono inevitabilmente anche gli altri. Questa considerazione è stata però volutamente tralasciata, perché ritenuta prematura per il livello scolare degli allievi (tuttavia alcuni alunni di prima media hanno rilevato che le due frasi “sono proprio uguali”).

Si veda [Allegato 3](#) per estratti dei diari di lavoro che riportano le proposte di completamento avanzate dagli alunni.

## FASE 2: "Arricchiamo" il modello montando le diagonali

Gli alunni riprendono ora il loro modello, costruito nella fase precedente; in più, ciascuno avrà del filo elastico (circa 30-40 cm) da passare intorno alle viti (o fermacampioni) ai vertici del modello, annodandone poi i capi come in foto:



Il modello risulta ora "arricchito" con un altro elemento: le diagonali; potrà essere opportuno/necessario far ricordare alla classe cosa sono le diagonali di un poligono, oppure si può cogliere l'occasione per introdurre il concetto se non è stato ancora fatto.

Viene quindi data la successiva consegna:

### Quarta consegna

- Osserva e descrivi cosa cambia nelle diagonali quando si articola il modello.

Gli alunni non avranno difficoltà a notare la variazione delle diagonali; sarà interessante discutere se le variazioni si compensano,

cioè se quanto "perde" in lunghezza una diagonale corrisponde esattamente all'aumento dell'altra. Sarà anche utile osservare con quale modalità gli alunni suggeriranno di verificare le loro congetture in proposito.

Si veda [Allegato 4](#) per riflessioni sulla (presunta) compensazione delle diagonali e sui metodi proposti dagli alunni per la verifica.

Sempre osservando varianti ed invarianti del modello, emergerà che le diagonali sono uguali solo nella posizione "a quadrato"; in tutte le posizioni, invece, esse si bisecano e sono perpendicolari.

### Quinta consegna

Vengono proposte di nuovo delle frasi da completare collettivamente, facendo questa volta riferimento alle diagonali:

- Un quadrato è un poligono che ha .....
- Un quadrato è un quadrilatero che ha .....
- Un quadrato è un parallelogramma che ha .....
- Un quadrato è un rombo che ha .....

Si veda [Allegato 5](#) per estratti dei diari di lavoro con le proposte di completamento avanzate dagli alunni.

Viene ora data una consegna "creativa".

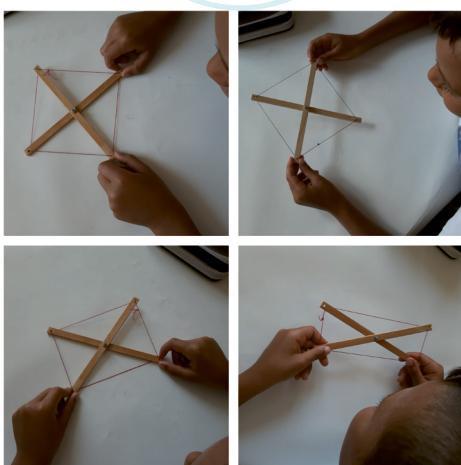
### Sesta consegna

- Come si potrebbe costruire un modellino di quadrato articolabile utilizzando due legnetti come diagonali?

Se non emergono proposte utili, sarà l'insegnante a suggerire la costruzione adatta, che viene poi realizzata nella fase successiva.

## FASE 3: Costruzione del modello "Quadrato a diagonali articolabili"

Vengono distribuiti ad ogni alunno: due legnetti uguali forati al centro e alle estremità; una piccola vite con bullone (o un fermacampione); un pezzo di filo elastico. Gli alunni costruiscono il modellino richiesto come quello mostrato in figura:



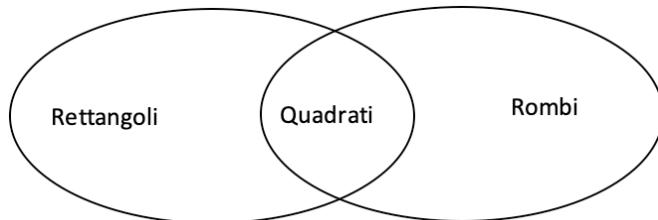
### Settima consegna

- Articolando il modello, quali figure si formano? Quante di ogni tipo? Perché?

Si osserverà che il modello permette di passare con continuità dal quadrato a infiniti rettangoli, in quanto le due figure hanno in comune la proprietà di possedere diagonali uguali e che si bisecano; si potrà allora aggiungere un'altra definizione di quadrato a quelle già formulate, completando la frase seguente con riferimento alle diagonali:

Un quadrato è un rettangolo che ha...

A questo punto del percorso, dalle osservazioni condotte sui modelli si osserva chiaramente che il quadrato appartiene sia all'insieme dei rombi (in quanto è un quadrilatero con i lati uguali) che a quello dei rettangoli (quadrilatero ad angoli congruenti); è possibile rappresentare le relazioni tra quadrato, rombo e rettangolo con un diagramma di Venn:



La rappresentazione mediante diagramma di Venn delle relazioni tra quadrato, rombo e rettangolo può essere un'occasione per osservare che rombo e rettangolo – a parte l'essere entrambi parallelogrammi – non hanno proprietà in comune. L'elemento di

contatto tra i due insiemi è rappresentato appunto dal quadrato che “condensa” in sé le proprietà di entrambi.

Si veda [Allegato 6](#) per estratti dei diari di lavoro con le proposte di completamento avanzate dagli alunni.

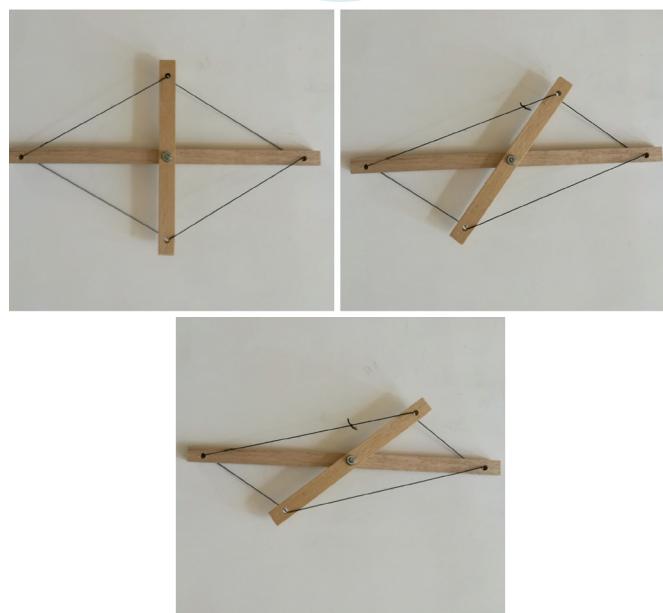
Possiamo ora riflettere con gli alunni su una possibile variante del modello appena costruito.

*Ottava consegna*

- Cosa otterremmo se le diagonali incernierate al centro fossero diverse?

#### FASE 4: Costruzione del modello “*Parallelogramma a diagonali articolabili*”

Gli alunni dovranno avere a disposizione gli stessi materiali della Fase 3, con la differenza che i legnetti saranno di misura diversa; il modello che si ottiene è mostrato nella seguente figura.

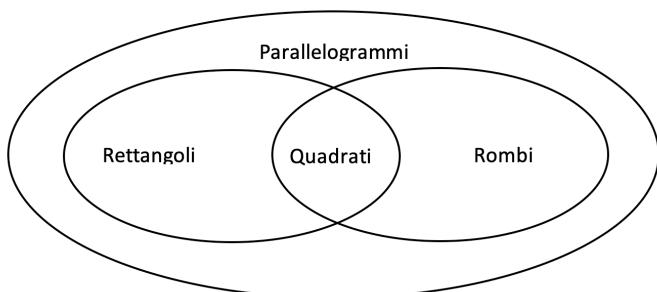


Ancora una volta, i ragazzi articolano il modello e rispondono alla consegna:

*Nona consegna*

- Quali figure si formano? Quante di ogni tipo? Perché?

I due tipi di quadrilatero hanno in comune la proprietà di avere le diagonali che si bisecano; solo quando esse sono perpendicolari si osserva il rombo. Se ne può concludere che il rombo è contenuto nell'insieme dei parallelogrammi. Ma anche quadrato e rettangolo hanno le diagonali che si bisecano; pertanto anch'essi sono inclusi nello stesso insieme. La rappresentazione con i diagrammi di Venn può quindi arricchirsi:



*Decima consegna*

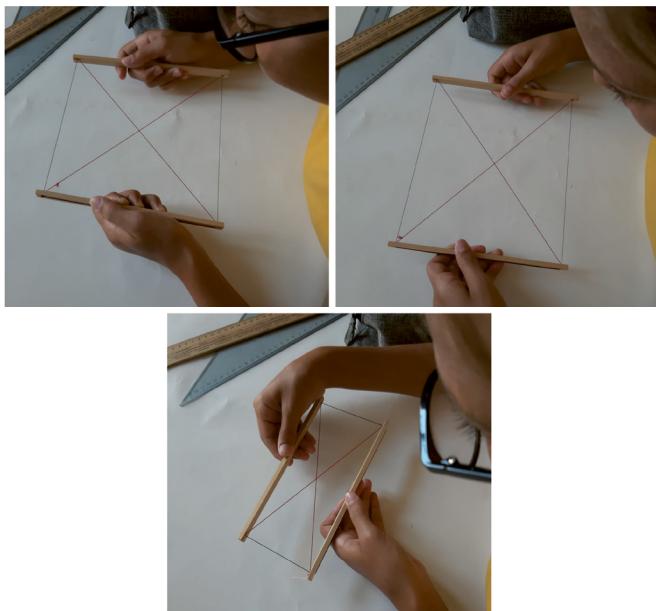
Si possono ora completare collettivamente le frasi seguenti, che ci permettono di dare alcune definizioni di rombo; anche in questo caso, l'elemento da prendere in considerazione saranno le diagonali:

1. Un rombo è un quadrilatero che ha .....
2. Un rombo è un parallelogramma che ha .....

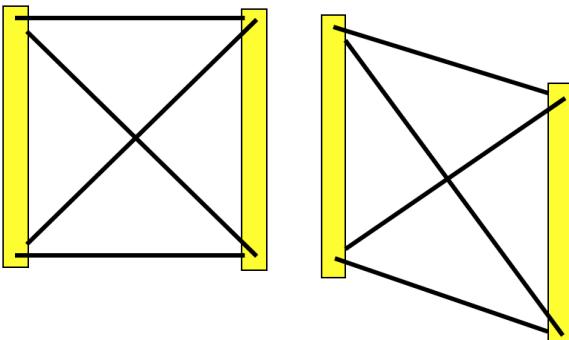
Si veda [Allegato 7](#) per una breve riflessione sulle proprietà necessarie, sufficienti, necessarie e sufficienti, con il supporto di modelli utilizzati come controesempi/esempi di appoggio.

## FASE 5: Il modellino "Tuttofare"... e il gioco dei recinti

Al termine del percorso, è opportuna una ricapitolazione che consenta agli alunni di avere un quadro completo delle relazioni tra i quadrilateri con i quali hanno lavorato fino a questo momento. È utilissimo a questo scopo il modellino "Tuttofare" (così lo hanno chiamato i nostri allievi) che illustriamo di seguito; può essere gestito direttamente dall'insegnante oppure può essere costruito anche dai ragazzi. È sufficiente che ciascuno di essi abbia due asticcioli uguali forate agli estremi e un filo elastico da far passare nei fori stessi, per individuare gli altri due lati e le diagonali.



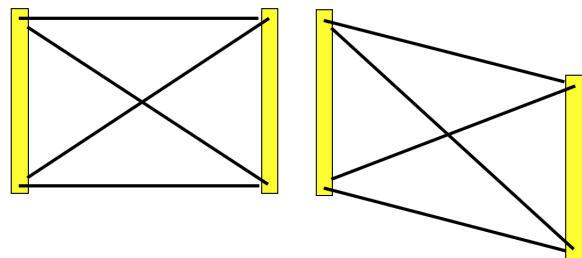
Se i lati in elastico hanno la stessa misura delle asticciole, mantenendo retti gli angoli si ottiene un quadrato; ma basta allontanare o avvicinare tra loro le asticciole – sempre ad angoli retti – ed ecco apparire infiniti rettangoli!



Se invece dalla posizione "a quadrato" si trasla un'asticciola e si perdono gli angoli retti, si possono ottenere rombi; ovviamente

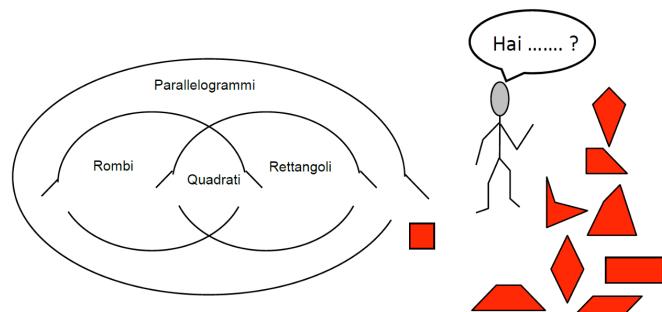
vanno mantenuti uguaglianza e parallelismo dei lati.

Infine, traslando le asticciole così che i lati non siano più congruenti, si possono ottenere generici parallelogrammi. A questi si può arrivare anche dalla posizione "a rettangolo" con una opportuna traslazione di un'asticciola:



Si veda [Allegato 8](#) per una tabella riepilogativa delle definizioni, con riflessioni sulla classificazione inclusiva e quella per partizione.

Si può ora proporre una rappresentazione più completa dell'insieme dei parallelogrammi, costruendo su di essa un gioco:



Immaginiamo di aver costruito dei recinti uno dentro l'altro come quelli in figura; ogni recinto ha un cancello e un guardiano che pone una domanda ai quadrilateri che chiedono di entrare. Il passaggio sarà consentito solo ai quadrilateri che rispondono affermativamente. La consegna, da svolgere collettivamente a voce, sarà:

### Undicesima consegna

- Cosa chiede ogni guardiano per consentire ai quadrilateri di entrare? Individua le domande giuste, facendo riferimento prima a lati e angoli e poi alle diagonali.

Ad esempio, una domanda come: "Hai le diagonali che si bisecano?", posta dal guardiano al cancello dei parallelogrammi, consentirà l'ingresso a quadrati, rombi, rettangoli e naturalmente generici parallelogrammi. Non permetterà invece che entrino trapezi o deltoidi.

Non sarebbe invece accettabile, allo stesso cancello, una domanda come: "Hai almeno due lati opposti paralleli?", dato che consentirebbe ai trapezi di accedere al recinto.

## Materiali

I materiali necessari per la costruzione dei modelli dinamici utilizzati sono facilmente reperibili e poco costosi. È anche opportuno che l'insegnante abbia i suoi modelli, sia quelli che costruiranno gli alunni sia gli altri che vengono utilizzati come esempi di appoggio o come controesempi.

**Attrezzature:** ✓ asticcio di legno (ma per alcuni modelli si può usare anche del cartoncino pesante), ✓ filo elastico, ✓ viti o fermacampioni, ✓ forbici e taglierino, ✓ cartoncino di tipo F4, ✓ strumenti da disegno, ✓ una tavoletta di compensato o plastica pesante per non danneggiare la superficie del banco.

---

## 3. Spazi necessari

Gli alunni possono lavorare al loro banco abituale, eventualmente anche a coppie. Pertanto l'attività si può svolgere in aula.

---

## Bibliografia e sitografia

Castelnuovo, E. (1963). *Didattica della Matematica*. Firenze: La Nuova Italia.  
Castelnuovo, E. (2005). *La matematica – Figure Piane A*. Firenze: La Nuova Italia.  
Castelnuovo, E., Barra, M. (1976). *Matematica nella realtà*. Torino: Bollati-Boringhieri.  
D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora Editrice.  
Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Gabellini, G., Masi, F., Nardi, J., Paternoster, F. (2003). I modelli dinamici: costruzioni di immagini mentali e avvio alla deduzione. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 26 A-B n. 6. 715-738.  
Facenda, A. M., Nardi, J., Zambon, D. (2010). Osservare, riconoscere, giustificare figure geometriche: proposta didattica con modelli dinamici e Cabri. *L'educazione Matematica* n. 2. 43-61.

Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Nardi, J., Paternoster, F., Rivelli, D., Zambon, D. (2011). Tutte le strade portano al quadrato. Resoconto di un percorso di insegnamento apprendimento. In B. D'Amore, S. Sbaragli (A cura di), *Matematica ed esperienze didattiche* (pp. 107-108). Bologna: Pitagora Editrice.  
Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Nardi, J., Paternoster, F., Rivelli, D., Zambon, D. (2018). Una esperienza di geometria dinamica sui trapezi: analisi critica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* vol. 41 A n.3. 331-360.  
Facenda, A. M., Fulgenzi, P., Nardi, J., Paternoster, F., Rivelli, D., & Zambon, D. (2018). Deltoidi come aquiloni. Un “volo” attraverso la geometria. *DdM*, 3, 116-134.

### Siti utili

<http://mathesispesaro.altervista.org>

---

**Osservo, imparo, definisco: i parallelogrammi**

Dipartimento formazione e apprendimento,  
Scuola universitaria professionale della svizzera italiana (SUPSI).

Autori: Anna Maria Facenda, Paola Fulgenzi, Janna Nardi, Floriana Paternoster, Daniela Rivelli, Daniela Zambon (Mathesis Pesaro)

Una pubblicazione del progetto *Communicating Mathematics Education*

Finanziato dal Fondo nazionale svizzero per la ricerca scientifica.

Responsabile del progetto: Silvia Sbaragli,  
Centro competenze didattica della matematica (DdM).

I testi hanno subito una revisione redazionale curata  
dal Centro competenze didattica della matematica (DdM).

Progetto grafico: Jessica Gallarate

Impaginazione: Luca Belfiore

Servizio Risorse didattiche, eventi e comunicazione (REC)

Dipartimento formazione e apprendimento - SUPSI



**Osservo, imparo, definisco: i parallelogrammi**

è distribuito con Licenza Creative Commons

Attribuzione - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale