

Equistereo caricature

Guida per l'insegnante

DI ANDREA CENTOMO

Liceo "F. Corradini" di Thiene

Email: andrea.centomo@istruzione.it

5 settembre 2019

Riassunto

In questa nota si mostra come una proiezione equirettangolare e una proiezione stereografica applicate all'immagine digitale di un ritratto siano sufficienti per ottenerne la caricatura. Questa osservazione apre a diverse prospettive per attività legate alla didattica della matematica e dell'informatica.

Key words: equirectangular projection, stereographic projection, digital image.

1 Introduzione

L'utilizzo degli strumenti informatici e dei *social media* pone lo studente a costante contatto con immagini digitali. Per questo motivo è importante che di questo tipo di oggetto egli abbia un minimo di consapevolezza sia dal punto di vista della struttura che delle possibilità di manipolazione. Entrambi gli aspetti sono, come ben noto, connessi a concetti matematici. Per essere più precisi possiamo prendere l'esempio semplice di un'immagine *bitmap*¹ in bianco e nero. Se la si apre con un editor per esadecimali sarà facile vedere come, a parte il preambolo, essa altro non sia che una tabella di numeri esadecimali compresi tra 0 e FF. Ad ogni numero corrisponde una tonalità di grigio del pixel corrispondente dell'immagine. Non è difficile capire che andando a modificare il valore di questi numeri esadecimali o il loro ordine si cambiano le caratteristiche dell'immagine e in questo consiste in parole molto povere il concetto di filtro di un'immagine. Il filtraggio di un'immagine può avvenire in molti modi diversi e più o meno complessi, tutti riconducibili a concetti matematici.

In questa nota si mostra come si possa costruire, a partire dall'immagine digitale di un ritratto, una sua caricatura usando un filtro il cui funzionamento si basa su un paio di trasformazioni geometriche della sfera nel piano. La trattazione dell'argomento è volutamente molto stringata. L'insegnante che vorrà accogliere questo spunto avrà modo di approfondire in modo personale le diverse questioni e potrà adattare i contenuti al livello scolastico in cui opera riducendo il formalismo. Oltre a questo ovviamente ci si potrà divertire in classe a costruire le più stravaganti caricature digitali possibili!

2 La proiezione equirettangolare

Consideriamo in \mathbb{R}^3 la 2-sfera S^2 di raggio $r > 0$ ed indichiamo rispettivamente con $\lambda \in [-\pi, \pi)$ e $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ gli angoli di longitudine e di latitudine. Si chiama proiezione equirettangolare della sfera nel piano la trasformazione

$$\mathcal{E}: [-\pi, \pi) \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\lambda, \varphi) \mapsto (x, y) = ((\lambda - \lambda_0)\cos(\varphi_0), \varphi - \varphi_0)$$

con λ_0 e φ_0 angoli di riferimento per la longitudine e la latitudine fissati.

1. <https://en.wikipedia.org/wiki/Bitmap>

Un caso particolare, importante per quanto segue, si ottiene ponendo $\lambda_0 = \varphi_0 = 0$. In questo caso la proiezione equirettangolare si riduce all'identità

$$\mathcal{E}_0: [-\pi, \pi) \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\lambda, \varphi) \mapsto (x, y) = (\lambda, \varphi)$$

e prende il nome francese di *plate carrée*.

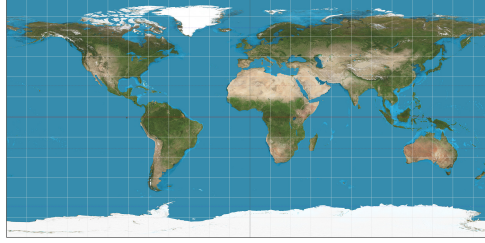


Figura 1. Plate carrée della superficie terrestre (da Wikipedia)

Non è difficile rendersi conto di alcuni fatti generali:

1. \mathcal{E} trasforma meridiani e paralleli rispettivamente in segmenti verticali e orizzontali;
2. \mathcal{E} non preserva l'area;
3. \mathcal{E} non è conforme (non conserva gli angoli).

Questa trasformazione pare fosse già nota a Marino di Tiro nel II secolo dopo Cristo [2] e nonostante la sua semplicità, il fatto che non preservi l'area e non sia conforme, ne rende problematico l'uso in cartografia. In ogni caso, in modo particolare di \mathcal{E}_0 , si fa uso in applicazioni GIS² [1].

Il fatto che \mathcal{E} non preservi aree e angoli, ma introduca delle distorsioni diventa un grande pregio dal punto di vista della sua applicazione alla creazione di caricature. Per l'uso che ne faremo è importante osservare che, almeno quando $\varphi_0 \neq \pm\pi/2$, la trasformazione \mathcal{E} è invertibile. Nel caso particolare del *plate carrée* poi, trattandosi di una trasformazione identica, l'invertibilità è ovvia e si ha

$$\mathcal{E}_0^{-1}: [-\pi, \pi) \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-\pi, \pi) \times [-\pi/2, \pi/2], \quad (x, y) \mapsto \mathcal{E}_0^{-1}(x, y) = (x, y).$$

3 Proiezione stereografica

Si chiama proiezione stereografica della sfera S^2 di raggio $r > 0$ (privata di un punto) nel piano la trasformazione

$$\mathcal{S}(\lambda, \varphi) = \begin{cases} x(\lambda, \varphi) = k \cos(\varphi) \sin(\lambda - \lambda_0) \\ y(\lambda, \varphi) = k [\cos(\varphi_0) \sin(\varphi) - \sin(\varphi_0) \cos(\varphi) \cos(\lambda - \lambda_0)] \end{cases}$$

dove

$$k = \frac{2r}{1 + \sin(\varphi_0) \sin(\varphi) + \cos(\varphi_0) \cos(\varphi) \cos(\lambda - \lambda_0)}$$

e con λ_0 e φ_0 angoli di riferimento per la longitudine e la latitudine fissati.

Osserviamo che l'immagine del punto $S = (\lambda_0, \varphi_0)$ (polo Sud) è

$$\mathcal{S}(\lambda_0, \varphi_0) = (0, 0)$$

e che il punto $N = (\lambda_0, \varphi_0 + \pi)$ (polo Nord) non ha immagine tramite \mathcal{S} in quanto

$$1 + \sin(\varphi_0) \sin(\varphi_0 + \pi) + \cos(\varphi_0) \cos(\varphi_0 + \pi) \cos(\lambda_0 - \lambda_0) = 0.$$

². Acronimo di Geographic Information System indica un sistema geografico gestito informaticamente.

Si verifica che la proiezione stereografica è conforme e che trasforma i meridiani in semirette e i paralleli in circonferenze. Da un punto di vista sintetico, dato un punto P della sfera che non sia il polo Nord N , la sua proiezione P' si ottiene intersecando la retta NP con il piano tangente alla sfera in S (vedi Figura 2).

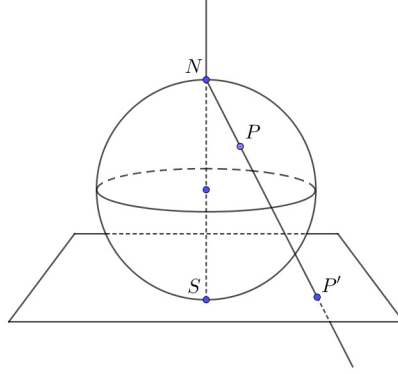


Figura 2. Proiezione stereografica

4 La geometria nel filtro

Il filtro *little planet* basa il suo funzionamento sulle due trasformazioni geometriche descritte sopra e di questo cercheremo ora di dare ragione.

Supponiamo di avere un'immagine I quadrata la cui dimensione in pixel sia $n \times n$ e consideriamo un sistema di assi cartesiani (O, x, y) con centro O coincidente con il centro dell'immagine I e con gli assi paralleli ai lati del quadrato. In questo sistema di riferimento si ha che

$$I = \left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right] \times \left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right].$$

Da un punto di vista matematico il filtro agisce su ciascun pixel (x, y) dell'immagine in tre passi:

1. al pixel (x, y) dell'immagine fa corrispondere la coppia di angoli (λ, φ) attraverso la trasformazione

$$\mathcal{T}(x, y) = (\lambda, \varphi) = \left(\frac{2\pi}{n}x, \frac{\pi}{n}y\right).$$

2. Al punto (λ, φ) viene fatto corrispondere sulla sfera il punto

$$\mathcal{E}_0^{-1}((\lambda, \varphi)) = (\lambda, \varphi)$$

usando la trasformazione inversa del *plate carrée*.

3. Se lavoriamo con il settaggio del filtro di default avremo come parametri per la proiezione stereografica i valori

$$\lambda_0 = 0 \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \quad r = 1.$$

ottenendo

$$\mathcal{S}_0(\lambda, \varphi) = \begin{cases} x = k \cos(\varphi) \sin(\lambda) \\ y = -k \cos(\varphi) \cos(\lambda) \end{cases} \quad (1)$$

con

$$k = \frac{2}{1 + \sin(\varphi)}.$$

La proiezione stereografica $\mathcal{S}_0(\lambda, \varphi)$ manda il punto (λ, φ) della sfera in un punto del piano che corrisponde ad un pixel della caricatura.

In sostanza, se I è l'immagine di partenza, la caricatura è data matematicamente da

$$\mathcal{S}_0(\mathcal{E}_0^{-1}(\mathcal{T}(I)))$$

e per questo motivo ha senso definirla **equistereo caricatura**.

Per convincersi del fatto che le cose stanno proprio in questo modo, evitando l'analisi poco agevole del codice sorgente del filtro, possiamo fare alcuni esperimenti.

Prima di tutto però notiamo che da (1) discende che

$$x^2 + y^2 = k^2 \cos^2 \varphi = \frac{4 \cos^2 \varphi}{(1 + \sin(\varphi))^2}$$

da cui si ha che, fissata una precisa **latitudine** φ , il parallelo ad essa corrispondente, viene trasformato da \mathcal{S}_0 in una circonferenza di raggio

$$R_\varphi = \frac{2 \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}. \quad (2)$$

Se invece fissiamo una precisa **longitudine** λ , con $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq \pi$, avremo che

$$y = -x \cot \lambda$$

da cui possiamo concludere che l'immagine di un meridiano tramite \mathcal{S}_0 è una semiretta passante per l'origine di pendenza $-\cot \lambda$.

Nota 1. Il fatto che la proiezione stereografica \mathcal{S}_0 mandi paralleli in circonferenze e meridiani in semirette si può far intuire facendo riferimento a disegni, usando qualche applet o qualche video³.

Esperimento 1. Consideriamo un'immagine quadrata di 1000×1000 pixel con al centro una striscia colorata orizzontale di spessore 100 pixel e applichiamo il filtro *little planet*. Il risultato è quello di Figura 3.



Figura 3. Immagine iniziale (a sinistra) e filtrata (a destra)

I paralleli, nella proiezione stereografica, si trasformano in circonferenze di cui possiamo calcolare i raggi e da questi risalire alla misura dello spessore della corona circolare in pixel. Se nell'immagine iniziale prendiamo il segmento orizzontale centrale $y = 0$, con $x \in [-500, 500]$, ad esso corrisponde attraverso la trasformazione \mathcal{E}_0^{-1} l'equatore della sfera. Quindi ci attendiamo che, usando la formula (2), il raggio della circonferenza che è la proiezione stereografica dell'equatore della sfera nel piano tangente la sfera valga

$$R_0 = 2 \text{ pixel}.$$

Tuttavia il filtro di default applica uno *zoom* pari a 100, quindi il raggio dell'equatore è pari a 200 pixel. Il raggio interno R_i della corona circolare si calcola in modo analogo

$$y = 50 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{1000} \cdot 50 = \frac{\pi}{20}$$

3. <https://www.youtube.com/watch?v=pWOMDm6ejlw>

da cui

$$R_\varphi \approx 17.1 \text{ pixel}$$

e, moltiplicando per lo zoom si ha $R_i \approx 171 \text{ pixel}$. Per il raggio esterno si ottiene il valore $R_e \approx 234 \text{ pixel}$ e da ciò possiamo concludere che lo spessore della corona è di circa 63 pixel.

Esperimento 2. Consideriamo l'immagine di partenza precedente ruotata di $\pi/2$ in senso orario e applichiamo il filtro *little planet*. Il risultato è quello di Figura 4.



Figura 4. Immagine iniziale (a sinistra) e filtrata (a destra)

I meridiani, nella proiezione stereografica, si trasformano in semirette di cui possiamo calcolare l'inclinazione rispetto all'asse delle ascisse. Se nell'immagine iniziale prendiamo il segmento verticale centrale $x = 0$, con $y \in [-500, 500]$, ad esso corrisponde attraverso la trasformazione \mathcal{E}_0^{-1} il meridiano fondamentale. La sua proiezione stereografica corrisponde alla semiretta di vertice l'origine O che giace sull'asse delle ordinate del piano tangente la sfera. Se la striscia è larga 100 pixel consideriamo la retta

$$x = 50 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{1000} \cdot 50 = \frac{\pi}{10}.$$

Ad essa corrisponde la semiretta di vertice O che giace sulla retta di equazione

$$y = -\cot\left(\frac{\pi}{10}\right)x$$

che forma con l'asse delle ascisse un angolo di ampiezza

$$-\frac{2}{5}\pi.$$

Con semplici calcoli trigonometrici possiamo risalire alla lunghezza in pixel dei lati del triangolo isoscele viola di Figura 4. La sua base avrà una lunghezza b pari a

$$b = 1000 \tan\left(\frac{\pi}{10}\right) \approx 325 \text{ pixel}$$

mentre i lati obliqui avranno una lunghezza di circa 380 pixel.

5 Conclusioni

In generale, a partire da un'immagine digitale, una equistereo caricatura sarà una caricatura il cui prototipo viene costruito componendo l'inversa di una proiezione equirettangolare con una proiezione stereografica.

Il lettore interessato a questioni di informatica può analizzare in dettaglio il modo in cui le proiezioni equirettangolare e stereografica sono state implementate per costruire il filtro *little planet* di Gimp in quanto il suo codice sorgente è disponibile online al sito del progetto⁴.

4. <https://gitlab.gnome.org/GNOME/gegl/blob/master/operations/common/little-planet.c>

Alternativamente è possibile tentare di implementare direttamente le trasformazioni in qualche linguaggio di programmazione e costruirsi un programma personale che generi lo stesso risultato. Questo richiede diverse competenze informatiche.

Con minime conoscenze di uso di Gimp o utilizzando una delle tante applicazioni per la fotomanipolazione delle immagini disponibili online è possibile ottenere l'immagine del quadro in Figura 5 oppure la più fantasiosa caricatura di chi scrive di Figura 5.



Figura 5. Francobollo con equistereo caricatura

Bibliografia

- [1] G. Farkas, *Practical GIS*, Packt Publishing, 2017.
- [2] J.P. Schnider, *Flattening the Earth: Two Thousand Years of Map Projections*, University of Chicago Press, 1993, pag. 5 – 8.