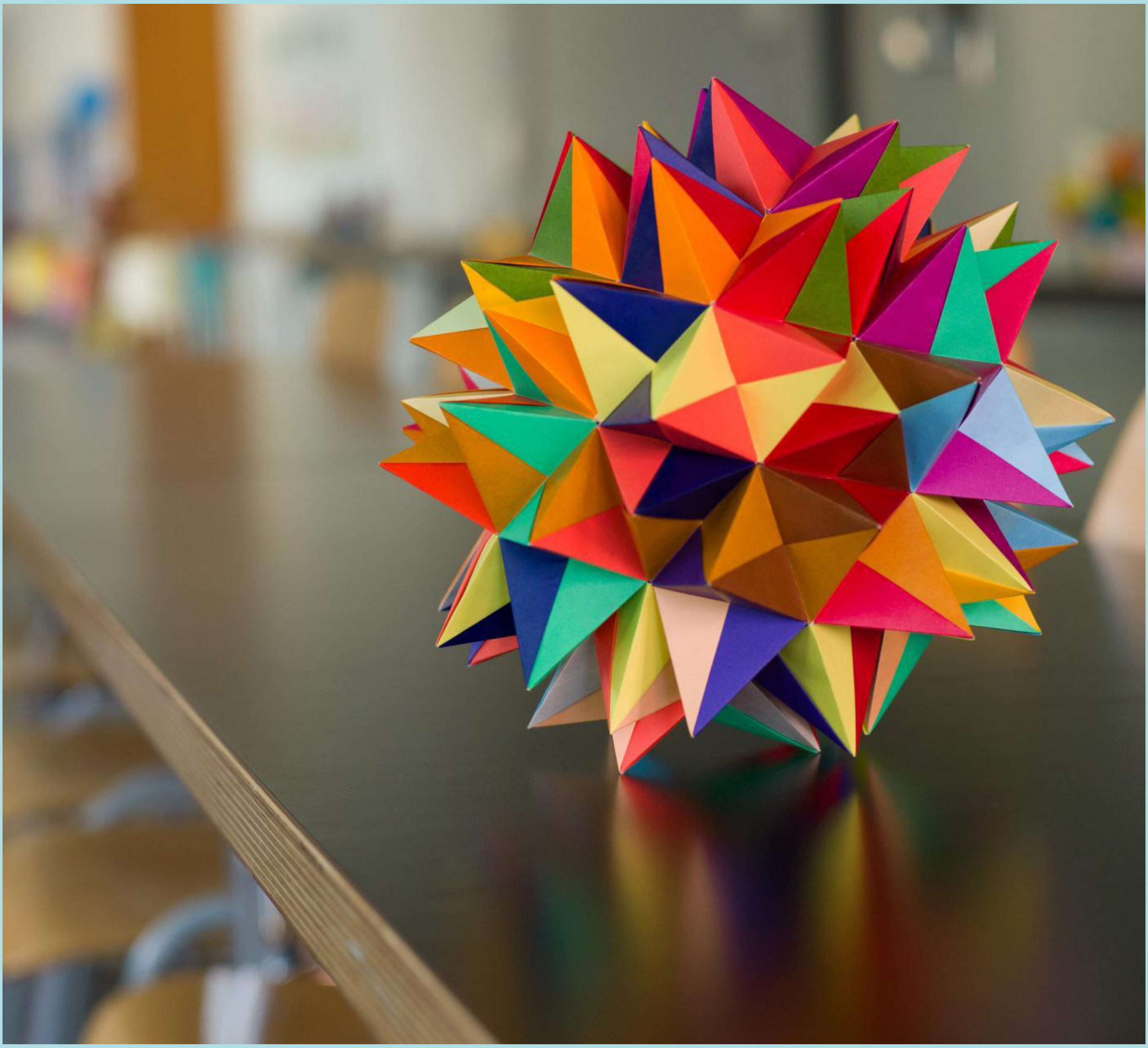
Geometria di carta: tetraedri, cubi e piramidi

SUPSI
MATEMATICANDO
A SPASSO CON LA MATEMATICA
PER LE STRADE DI LOCARNO



Titolo
Geometria di carta: tetraedri, cubi e piramidi

Autori
Paolo Bascetta e Francesco Decio

Sede di lavoro
Centro Diffusione Origami, Pavia (Italia)

Età
a partire dagli 8 anni

Parole chiave
Origami; figure solide; cubo; tetraedro

Origami significa piegare la carta: piegandola si può ottenere praticamente ogni sorta di figura. In questo caso, il laboratorio prevede la costruzione di diversi solidi. Mano a mano che si piega, il gioco diventa interessante anche dal punto di vista matematico, perché i ragazzi sono invitati a riflettere sulle relazioni tra i solidi costruiti.

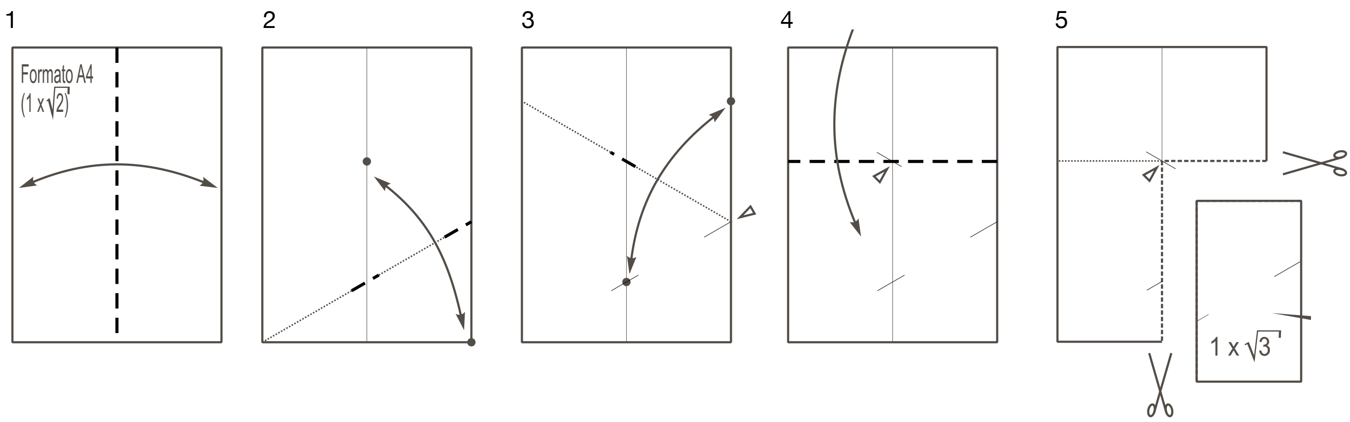
1. Presentazione

Origami significa piegare la carta e piegandola si può ottenere praticamente ogni sorta di figura. Si piega la carta senza usare altro che le proprie mani e un po' di testa. Non si usano forbici né colla. Tra la sterminata quantità di figure realizzabili, ci sono ovviamente anche quelle geometriche; in questo caso, il laboratorio prevede la costruzione di cubi, tetraedri, piramidi e, tempo permettendo, molto altro. Mano a mano che si piega, il gioco diventa interessante anche matematicamente, perché i ragazzi saranno invitati a riflettere sulle relazioni tra i solidi costruiti. Puntualmente ci sarà sempre qualcuno che indovina o intuisce e allora, come in un effetto domino, tutti i partecipanti potranno verificare concretamente quanto viene emergendo. La scoperta sarà certamente sorprendente: si riuscirà a "riempire" un cubo con un tetraedro e quattro piramidi! La piegatura della carta si intreccia con considerazioni geometriche in maniera accattivante e apparentemente lontana dalle formule scolastiche, ma a ben guardare risulterà comunque legata a filo doppio con i teoremi e le procedure imparate sui banchi di scuola: Pitagora, Talete, enti geometrici solitamente astratti, emergeranno quasi magicamente e concretamente, e potranno essere analizzati in modo tangibile e diretto oltre che rigoroso. L'attività è pensata per essere svolta da ogni singolo bambino, sotto la guida di un insegnante e con il supporto grafico delle istruzioni di piegatura che vengono presentate nella descrizione delle fasi.

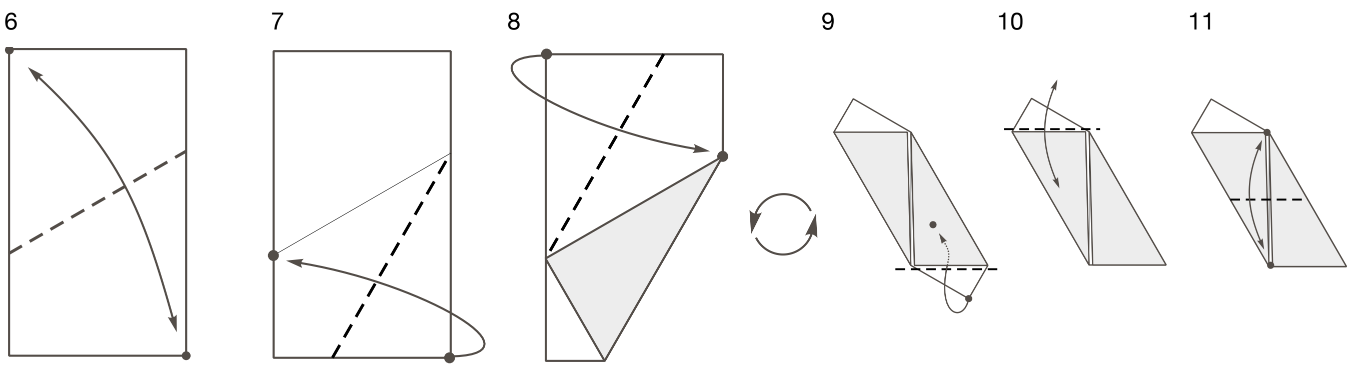
2. Descrizione Fasi[1]

FASE 1: ***Costruzione del tetraedro***

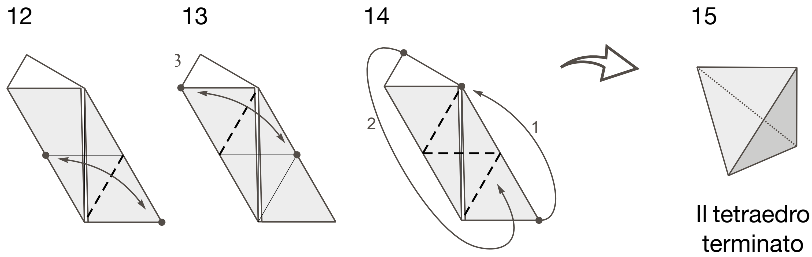
Per costruire un tetraedro, occorre avere a disposizione un rettangolo le cui dimensioni siano fra loro in rapporto di $\sqrt{3}$. Per ottenere un rettangolo di tali dimensioni, occorre partire da un foglio A4, piegarlo e ritagliarlo nel seguente modo (si veda Allegato 1 per la spiegazione):



Il rettangolo così ottenuto avrà dimensioni pari a 105 x 182 mm. Si prosegue a piegare solo il rettangolo ritagliato, in base alle seguenti istruzioni:



1. La descrizione delle seguenti fasi è stata rielaborata a partire dall'articolo di Criscuolo & Decio (2014).

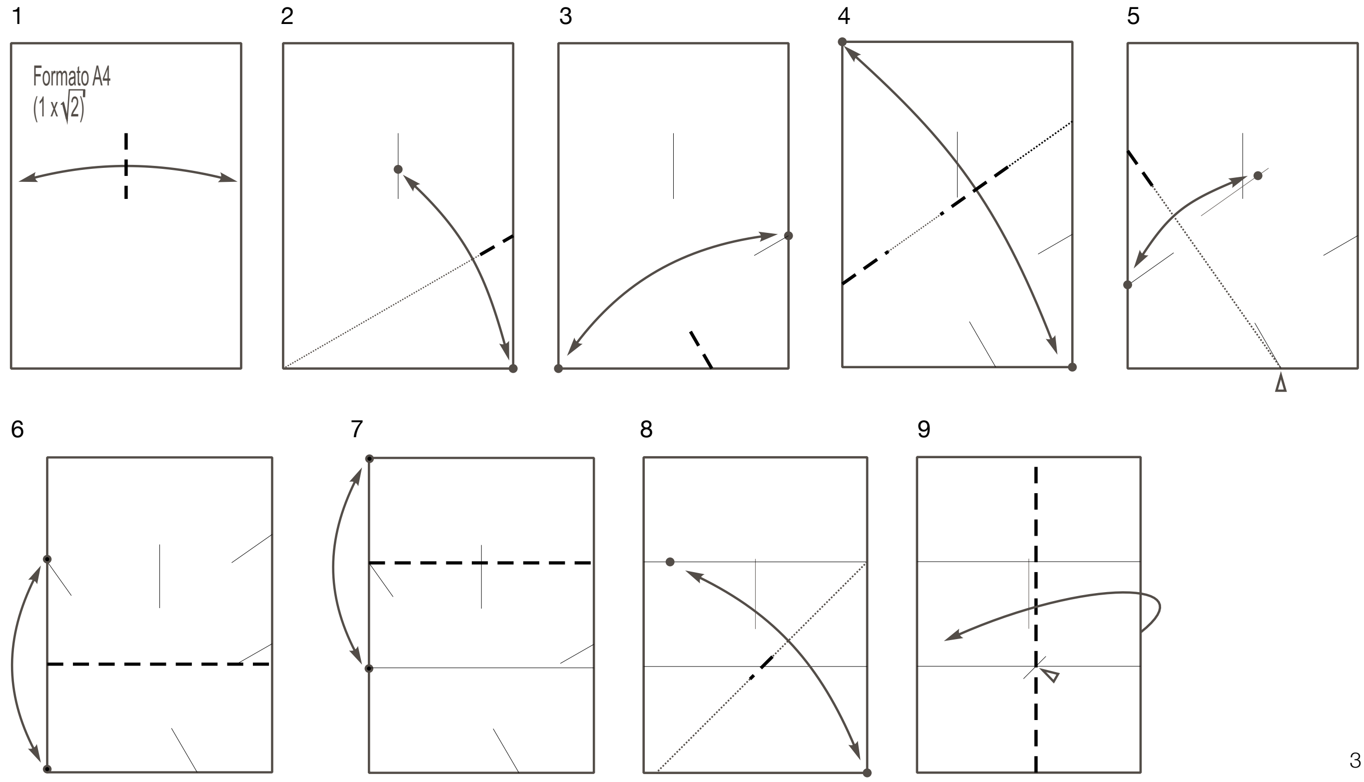


Il tetraedro terminato

La piega eseguita al n. 6 corrisponde ad un angolo di 60 gradi (giustificazione nell'Allegato 2). Tutte quelle successive formano angoli multipli o sottomultipli di questo valore. Il lato finale del tetraedro risulta per costruzione pari a $\frac{2}{3}$ del lato corto di partenza (105 mm) (Allegato 3). Quindi in termini assoluti il lato finale del tetraedro sarà pari a 70 ($105 \cdot \frac{2}{3}$) mm.

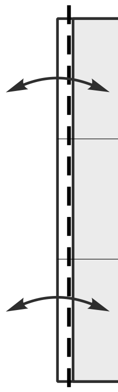
FASE 2: ***Costruzione del cubo***

È possibile orientare un tetraedro in modo che i suoi sei spigoli corrispondano esattamente alle diagonali delle sei facce di un cubo. Sappiamo che lo spigolo del tetraedro appena costruito è lungo 70 mm. Per ottenere un quadrato con la diagonale pari a 70 mm sarà quindi necessario un quadrato con lato lungo 49.5 mm. Tale misura è proprio pari a $\frac{1}{6}$ del lato lungo di un A4 ($\frac{297}{6} = 49{,}5$). La costruzione modulare di un cubo secondo le istruzioni del grande origamista Paul Jackson è ideale per ottenere questo rapporto proprio perché tale metodo restituisce un modulo con il lato pari a metà delle dimensioni di partenza. In altre parole, partendo da $\frac{1}{3}$ del lato più lungo di un foglio A4, si ottiene un modulo che ci darà un cubo con lo spigolo pari a 49,5 mm, cioè esattamente quanto serve. Di seguito le istruzioni che, partendo da un A4, permettono di ricavare i sei fogli necessari per piegare un cubo.

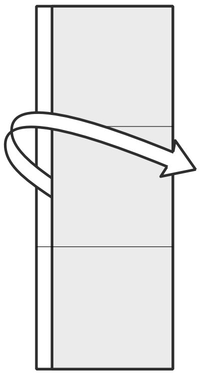


La piega n. 3 determina esattamente $\frac{1}{3}$ del lato corto (Allegato 4). La piega n. 5 serve a riportare la stessa misura ($\frac{1}{3}$) sul lato lungo sfruttando il teorema di Talete (Allegato 5). A quel punto si possono facilmente ottenere altre divisioni corrispondenti ai lati dei quadrati da usare per il cubo.

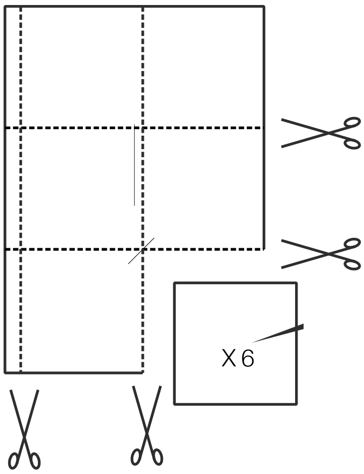
10



11

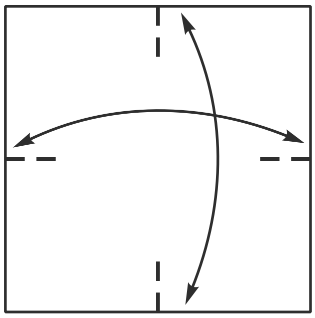


12

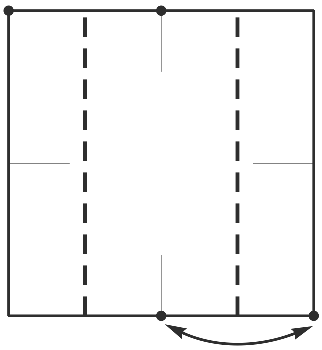


Di seguito le istruzioni per costruire, con i sei quadrati appena ritagliati, un cubo

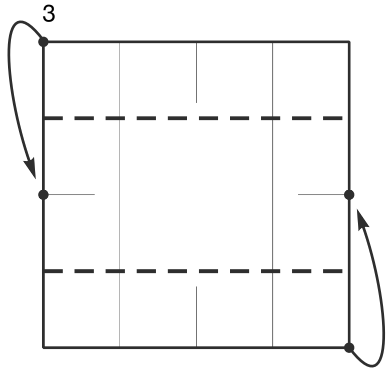
1



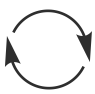
2



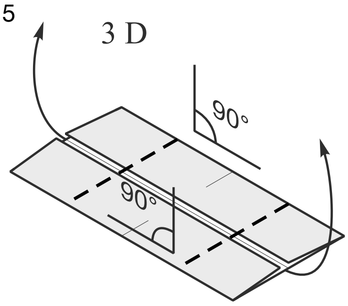
3



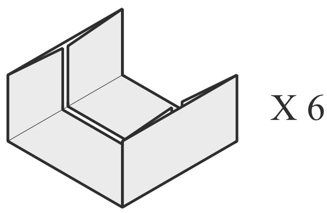
4



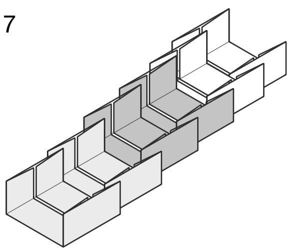
5



6

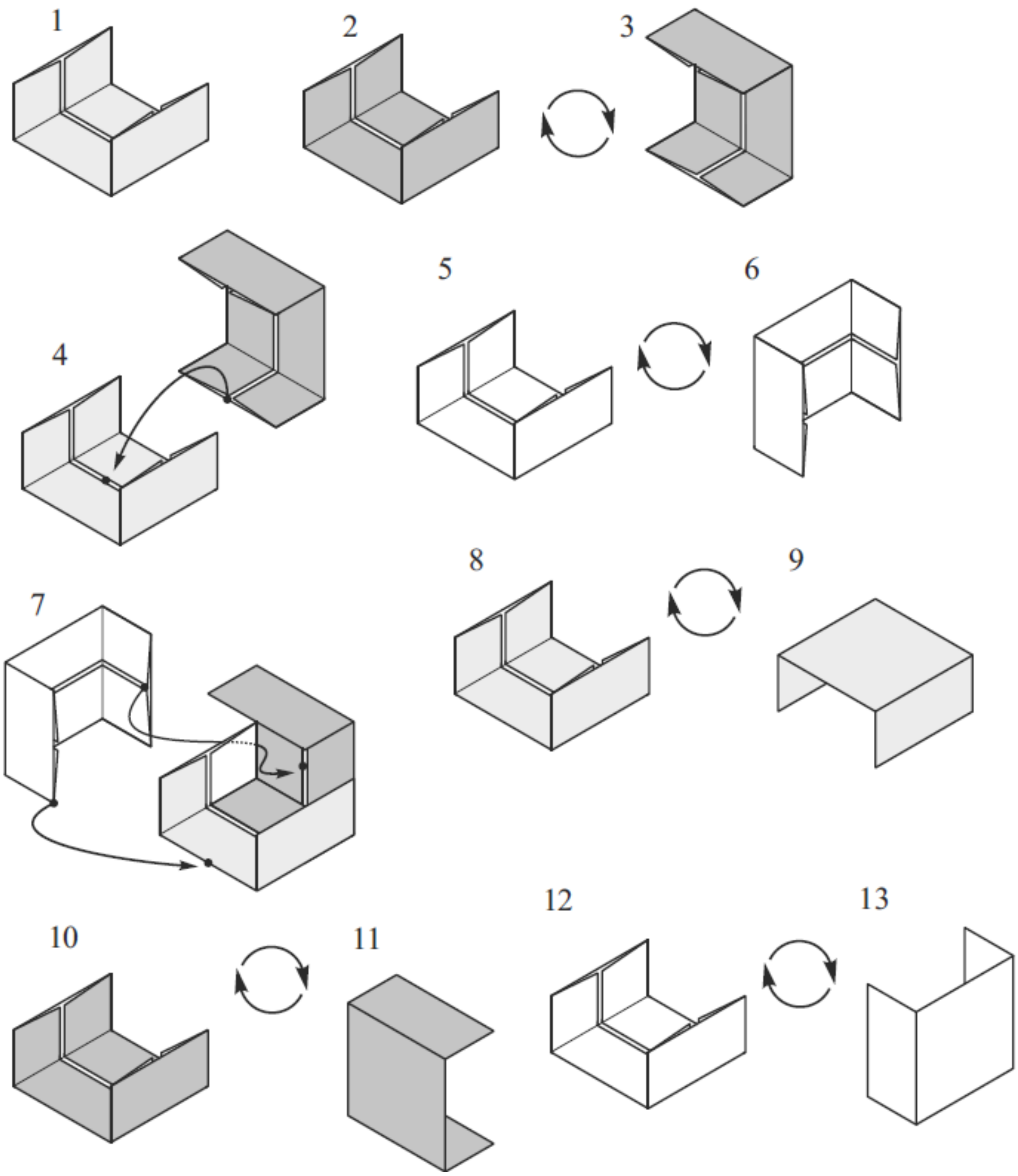


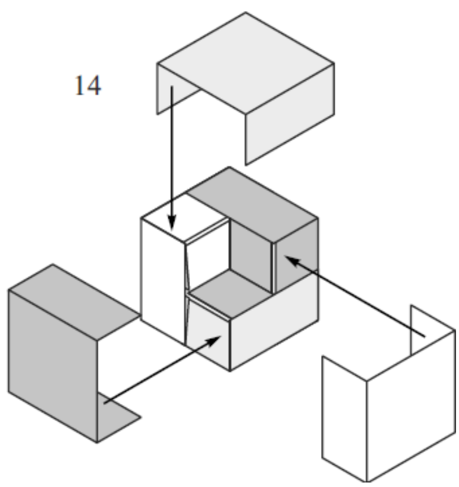
7

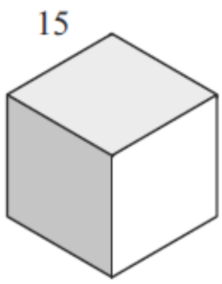


Sei moduli pronti per l'assemblaggio del cubo

Montaggio dei sei moduli
per ottenere il cubo





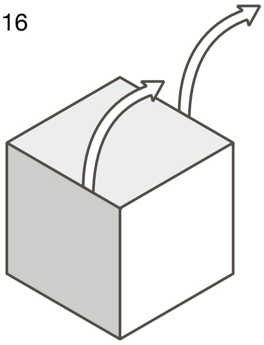


Il cubo
terminato

FASE 3: ***Inclusione del tetraedro nel cubo***

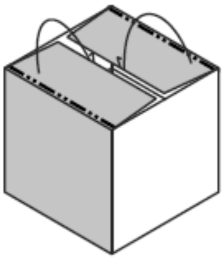
Ora che anche il cubo è pronto, è possibile provare a inserire il tetraedro nel cubo. Innanzitutto occorre togliere un modulo del cubo. Si consiglia di estrarre il modulo superiore e cioè quello opposto al piano d'appoggio.

16

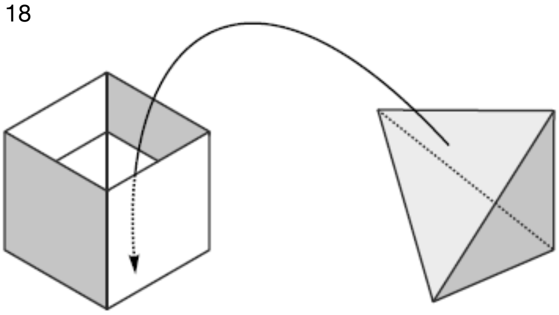


Una volta ripiegate le alette all'interno, si può inserire nel cubo il tetraedro opportunamente orientato (gli spigoli del tetraedro devono coincidere con le diagonali delle facce del cubo).

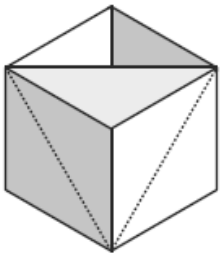
17



18



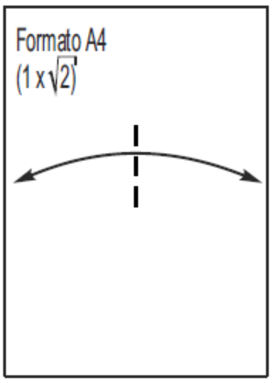
19



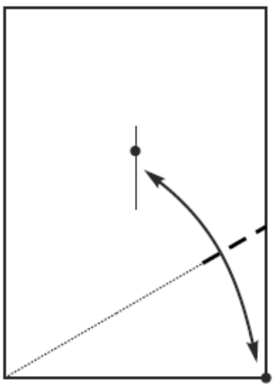
FASE 4: ***Costruzione delle quattro piramidi***

Per completare il riempimento del cubo, occorre realizzare ancora quattro piramidi. Prima di procedere alla costruzione delle piramidi, è necessario ricavare da un foglio A4 quattro fogli quadrati da 70 x 70 mm adatti al successivo inserimento nel cubo:

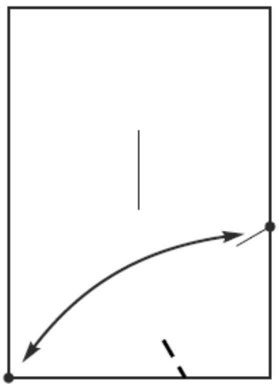
1



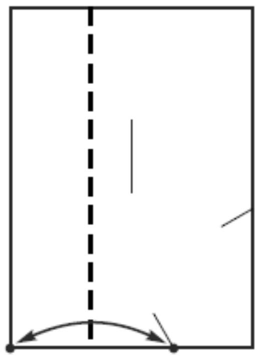
2



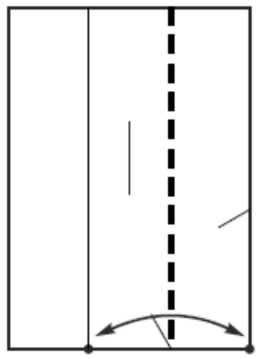
3



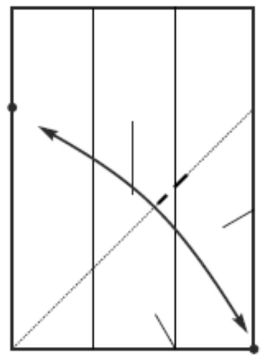
4



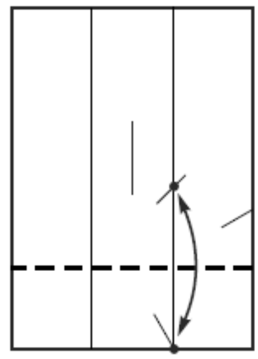
5



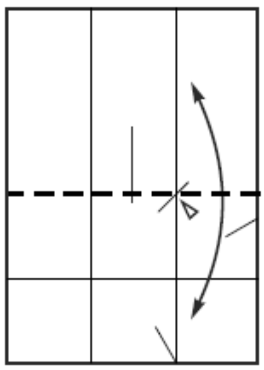
6



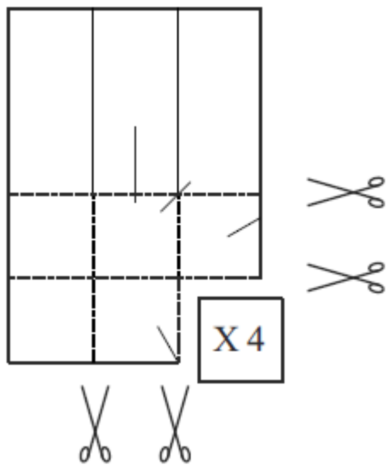
7



8

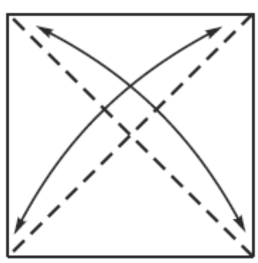


9

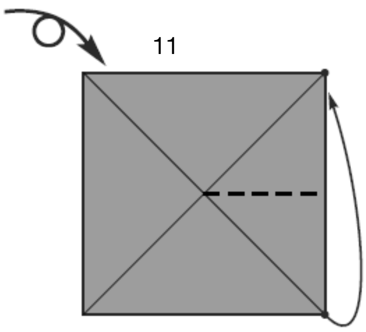


Con questi quattro quadrati, seguendo le seguenti istruzioni si possono costruire quattro piramidi a base triangolare da inserire nello spazio lasciato vuoto dal tetraedro nel cubo.

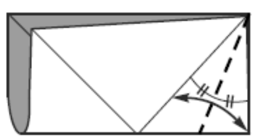
10



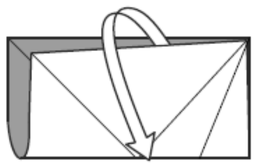
11



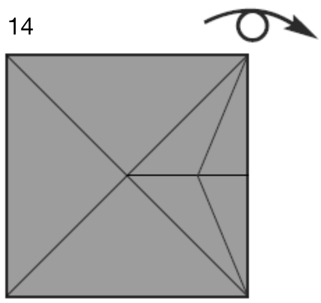
12



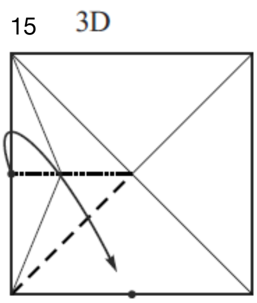
13



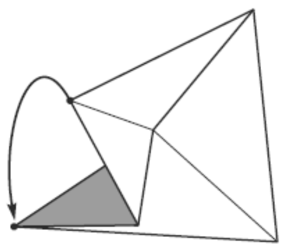
14



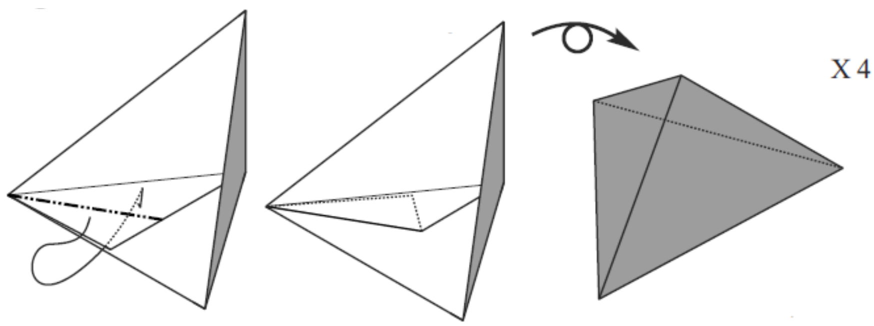
15



16

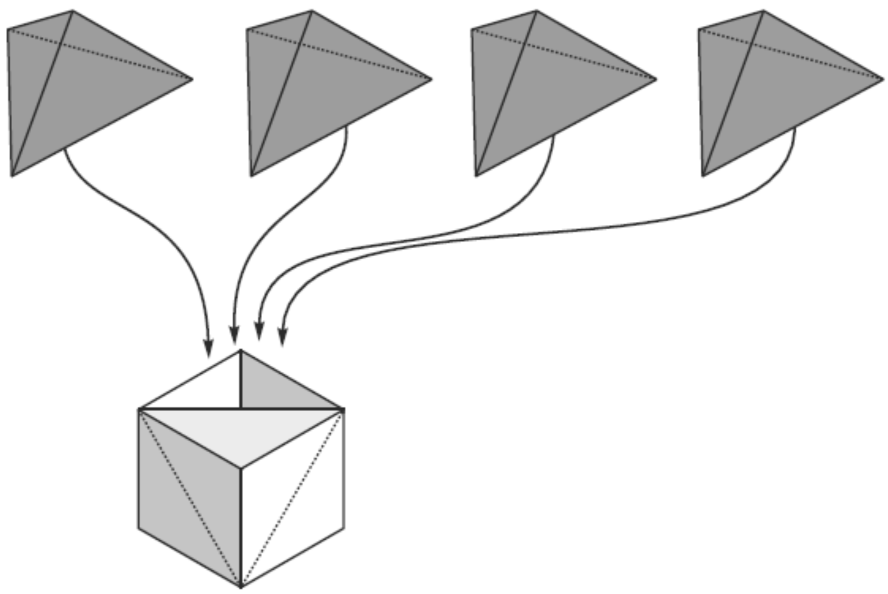


17 18 19

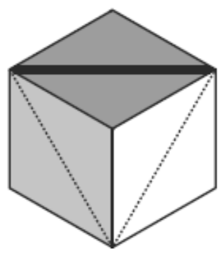


Terminate le quattro piramidi, esse potranno essere inserite nel cubo (la lunghezza dello spigolo del tetraedro deve coincidere con la lunghezza del lato della base delle piramidi, e dunque con gli spigoli del cubo):

20



21

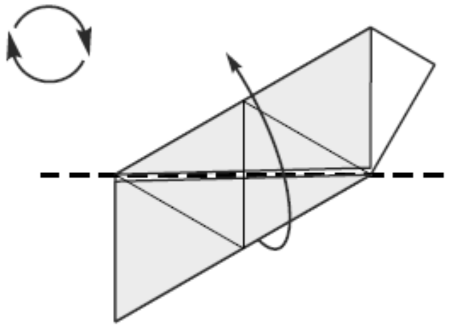


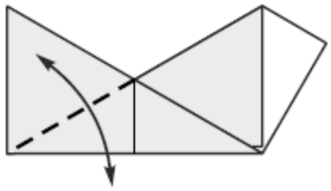
A questo punto, osservato che il tetraedro e le quattro piramidi riempiono completamente il cubo, è possibile valutare il volume del tetraedro in rapporto al cubo. E lo si può fare senza usare strumenti né fare calcoli di sorta. Per farlo è necessario preparare un ultimo modello pari alla metà del tetraedro inserito nel cubo e confrontarlo con le quattro piramidi che hanno riempito gli spazi vuoti del cubo non occupati dal tetraedro.

FASE 5: ***Costruzione del mezzo tetraedro e considerazioni finali***

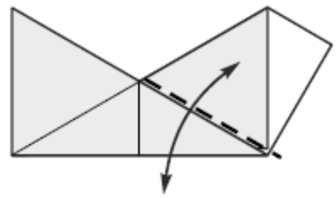
Le prime tredici istruzioni per la costruzione del mezzo tetraedro coincidono con le tredici istruzioni iniziali descritte nella fase 1: costruzione del tetraedro. Arrivati a questo punto, si procede come segue:

14

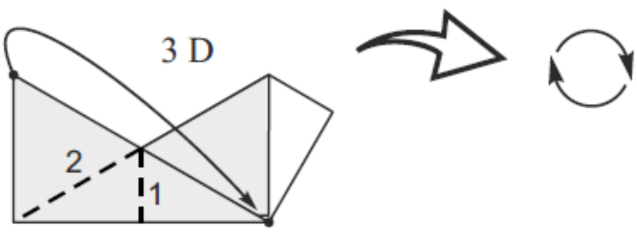




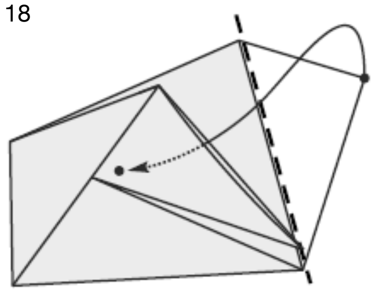
16



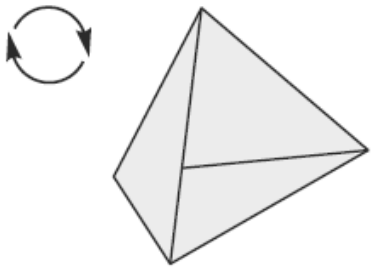
17



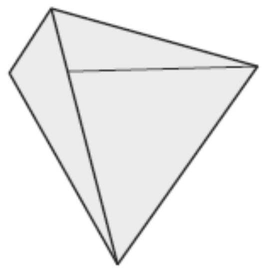
18



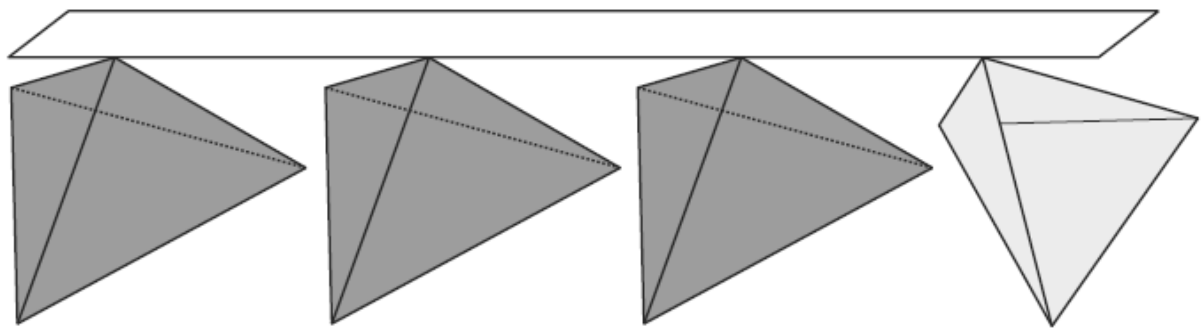
19



20



La piramide così ottenuta ha un volume pari a metà di quello del tetraedro regolare. Si può notare che una faccia è la stessa di una delle facce delle quattro piramidi e che l'altezza relativa è uguale a quella delle stesse quattro piramidi. Per verificare concretamente che le altezze sono uguali si può iniziare con il disporre tre delle quattro piramidi su un piano e appoggiare sui vertici un cartoncino sufficientemente rigido. Il cartoncino ovviamente poggerà su tutti e tre i vertici perché per tre punti passa un unico piano. Se ora affianchiamo alle tre piramidi il mezzo tetraedro, con la sua faccia triangolare equilatera poggiata sul piano, vedremo che anche il vertice di questo tocca il cartoncino piano che passa per i vertici delle tre piramidi:



Ciò mostra che il modello di “metà tetraedro” è alto quanto ciascuna delle quattro piramidi.
Ora, due piramidi aventi una faccia e l’altezza relativa uguali hanno lo stesso volume, analogamente a quanto accade nella geometria del piano in cui due triangoli con lati e altezze relative uguali hanno la stessa area. In altre parole, la piramide, “metà tetraedro” regolare, ha lo stesso volume di ciascuna delle quattro piramidi.
Poiché il cubo è completamente riempito da sei piramidi che hanno lo stesso volume – le due metà del tetraedro regolare e le quattro piramidi – ognuna di esse ha un volume pari a $\frac{1}{6}$ del cubo. Quindi il tetraedro, che è costituito da due di queste piramidi, ha un volume pari a $\frac{2}{6}$ di quello del cubo in cui è incluso; cioè, semplificando, pari a $\frac{1}{3}$ di quello del cubo.
Una scoperta interessante cui si è giunti in modo diretto, senza formule e senza calcolatrice.

Materiali
Attrezzature: ✓ cutter.
Materiali cartacei: tre fogli di formato A4 per ogni studente, le istruzioni stampate (Allegato 6).

3. Spazi necessari

Gli spazi necessari per piegare la carta si riducono allo spazio di un’aula.

Bibliografia

Criscuolo, A. & Decio, F. (2014). Cubo x tetraedro 2014. *Quadrato magico. 111*. Centro Diffusione Origami.
www.origami-cdo.it
www.paolobascetta.format.com
www.bergamorigami.it

Galleria Matematicando


partnership


internazionalità
partnership


territorialità
partnership
originalità


territorialità
partnership

Geometria di carta: tetraedri, cubi e piramidi
Dipartimento formazione e apprendimento,
Scuola universitaria professionale della svizzera italiana (SUPSI).
Autori: Paolo Bascetta e Francesco Decio

Una pubblicazione del progetto *Communicating Mathematics Education*
Finanziato dal Fondo nazionale svizzero per la ricerca scientifica.
Responsabile del progetto: Silvia Sbaragli,
Centro competenze didattica della matematica (DdM).

I testi hanno subito una revisione redazionale curata
dal Centro competenze didattica della matematica (DdM).

Progetto grafico: Jessica Gallarate
Impaginazione: Luca Belfiore
Servizio Risorse didattiche, eventi e comunicazione (REC)
Dipartimento formazione e apprendimento – SUPSI

Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana
SUPSI

FNSNF
Fonds national suisse
Schweizerischer Nationalfonds
Fondo nazionale svizzero
Swiss National Science Foundation